Des logiques de variations avec attributs numériques pour représenter des règles d'adaptation*

Nicolas François[1], Jean Lieber[2]

[1] Lycée public Chopin, F-54000 Nancy, France
[2] Université de Lorraine, CNRS, LORIA, F-54000 Nancy, France

Résumé

Les connaissances d'adaptation d'un système de raisonnement à partir de cas (RàPC) sont souvent représentées par des règles d'adaptation qui peuvent être apprises à partir de la base de cas, en se fondant sur plusieurs approches proposées dans la littérature du RàPC. Cependant, la représentation formelle de telles règles a été bien moins étudiée. Cet article introduit un formalisme pour représenter de telles règles, s'appuyant sur un formalisme de couples attributs-valeurs dans lequel sont représentés les cas.

Mots-clés

raisonnement à partir de cas, représentation des connaissances, adaptation

Abstract

The adaptation knowledge container of a CBR system is often represented by adaptation rules, that can be learnt from the case base using various approaches proposed in the CBR literature. However, the formal representation of such rules has been much less investigated. This article introduces a formalism for representing such rules, given a formalism that can be used to express cases in an attribute-value formalism.

Keywords

case-based reasoning, knowledge representation, adaptation

1 Introduction

Le raisonnement à partir de cas (RàPC [9]) consiste à résoudre des problèmes en s'appuyant sur la résolution de problèmes antérieurs, appelés cas. L'adaptation est considérée, pour certains membres de la communauté du RàPC, comme un processus clef de ce type de raisonnements ; elle consiste à modifier un cas sélectionné dans la base de cas dans l'optique de la résolution du problème posé. Cet article s'inscrit dans cette tradition et la considère du point de vue de la représentation des connaissances : comment les connaissances d'adaptation peuvent-elle être représentées dans le cadre du RàPC ?

Pour s'attaquer à cette question, le point de départ a été certains travaux sur l'apprentissage de connaissances d'adaptation (ACA). L'ACA a une longue histoire dans le domaine du RàPC, au moins depuis un article de K. Hanney et M. T. Keane [5]. L'ACA s'appuie en général sur ce qu'on appelle parfois l'heuristique des différences [6] : les différences entre couples de cas dans la base de cas sont utilisées comme ensemble d'apprentissage pour un système d'apprentissage artificiel. En particulier, une notation a été introduite pour représenter de telles différences : elle consiste en expressions de la forme a^v où a est un attribut d'un cas et v est un *symbole de variation*. Par exemple, dans le domaine culinaire, pour exprimer que, pour une recette de dessert, 2 œufs peuvent être substitués par 1 banane, l'ensemble suivant d'expressions peut être employé :

$$\left\{\texttt{dessert}^{\texttt{=1}},\quad \texttt{\#œufs}^{\texttt{-2}},\quad \texttt{\#bananes}^{\texttt{+1}}\right\}$$

Ici, `dessert` est un attribut booléen : ses valeurs potentielles sont 0 et 1 (assimilées à *faux* et à *vrai*), alors que `#œufs` et `#bananes` sont des attributs à domaines entiers.

Cette notation a été utilisée dans des études relativement anciennes [1] tout comme dans des travaux plus récents [8]. À cette notation (ou syntaxe), une sémantique peut être associée, donnant naissance à des formalismes logiques, les *logiques de variations*, dans lesquelles les règles d'adaptation peuvent être représentées.

La section 2 présente des préliminaires portant principalement sur le RàPC. La base de cas et les connaissances du domaine peuvent être représentées dans ce qu'on pourrait qualifier de *logique statique* ; la section 3 présente la logique statique $(\mathcal{LG}, \models)$ qui est suffisamment expressive pour représenter des couples attributs-valeurs (avec des attributs booléens ou numériques) et des taxonomies (et au-delà). La section 4 définit la logique des variations $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ qui s'appuie sur $(\mathcal{LG}, \models)$: sa syntaxe, sa sémantique et quelques propriétés simples. La section 5 présente la façon dont des règles d'adaptation peuvent être définies en utilisant cette logique. Pour les résultats de ces sections, il est supposé que les logiques $(\mathcal{LG}, \models)$ et $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ s'appuient sur un groupe abélien infini $(\mathcal{G}, +)$; en particulier, le test de satisfiabilité s'appuie sur cette hypothèse. La section 6 explique comment modifier l'approche sous d'autres hypothèses (p. ex. si $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe abélien

*Les auteurs tiennent à remercier les relectrices et relecteurs anonymes pour leurs lectures sérieuses et détaillées. Leurs remarques ont permis d'améliorer la qualité de cet article. Elles ont permis en particulier d'enlever une grosse bêtise énoncée en plein milieu d'une proposition ! Certaines suggestions nous seront utiles pour la rédaction d'articles futurs.

fini). La section 7 discute la contribution de cet article, conclut et présente quelques perspectives.

Remarques :

- Cet article est une version modifiée d'un article qui va être publié dans les actes d'ICCBR-2025 (la manifestation internationale et annuelle sur le RàPC).
- On peut noter que le contenu de cet article est assez proche de celui publié par les mêmes auteurs dans les JIAF-JFPDA en 2024 [3]. La différence principale entre le travail présenté ici et ce travail précédent est que la logique statique sur laquelle la logique des variations s'appuyait était la logique propositionnelle, alors que la logique statique considérée dans cet article est $(\mathcal{LG}, \models)$ qui étend la logique propositionnelle.
- La section 6 est une contribution originale de cet article (elle n'est pas dans l'article d'ICCBR-2025).
- Cet article contient des résultats sans leurs preuves : ces dernières peuvent être trouvées dans la version étendue de cet article, qui est accessible en ligne [4].

2 Préliminaires

Cette section présente quelques notations et hypothèses, principalement à propos du RàPC.

2.1 Notions et notations mathématiques

$\mathbb{B}$, l'ensemble des booléens, est assimilé à la paire d'entiers $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ (0 pour faux, 1 pour vrai). $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leqslant b$, $[\![a, b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, a \leqslant n \leqslant b\}$. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels.

Un *groupe abélien* est un couple $(\mathcal{G}, +)$ où $\mathcal{G}$ est un ensemble non vide et $+$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{G}$ ($+ : (r, s) \in \mathcal{G} \mapsto r + s \in \mathcal{G}$) telle que (1) elle a un élément neutre noté 0 (pour tout $r \in \mathcal{G}$, $r + 0 = 0 + r = r$), (2) tout $r \in \mathcal{G}$ a un élément symétrique s ($r + s = s + r = 0$), s est noté $-r$, (3) $+$ est associative ($(r+s)+t = r+(s+t)$ pour tous $r, s, t \in \mathcal{G}$), et (4) $+$ est commutative ($r + s = s + r$ pour tous $r, s \in \mathcal{G}$). Pour $r, s \in \mathcal{G}$, $r - s$ est une abréviation de $r + (-s)$.

Pour l'addition usuelle sur les nombres, $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$ sont des groupes. $(\{0, 1, 2\}, +)$ n'est pas un groupe puisque $+$ n'est pas interne dans cet ensemble (p. ex. $2 \in \{0, 1, 2\}$ mais $2 + 2 = 4 \not\in \{0, 1, 2\}$).

2.2 Le RàPC : notions, notations et hypothèses

Ces préliminaires au sujet du RàPC ne reflètent pas toute la variété des systèmes de RàPC. En particulier, dans cet article, un cas est considéré comme un couple problème-solution. Un *problème* est, par définition, un élément $\mathtt{x}$ d'un ensemble donné $\mathcal{P}$. Une *solution* est, par définition, un élément $\mathtt{y}$ d'un ensemble donné $\mathcal{S}$. Ces deux ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont supposés disjoints. On suppose l'existence d'une relation sur $\mathcal{P} \times \mathcal{S}$ qui n'est pas complètement connue pour le système de RàPC, et qui se lit "a pour solution". Un *cas* est un couple $(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$. Un *cas correct* est un cas $(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ tel que $\mathtt{x}$ a pour solution $\mathtt{y}$. La *base de cas* $\mathtt{BC}$ est un ensemble fini de cas corrects. Un cas de $\mathtt{BC}$ est appelé *cas source* et est noté par $(\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s)$. Enfin, il est supposé que les cas sources représentent des épisodes *spécifiques* de résolution de problèmes.

Modèle de processus. Une session de RàPC consiste en la résolution d'un problème appelé le *problème cible* et noté $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}$. Un schéma de processus fréquent pour le RàPC consiste en (1) la sélection d'un cas source $(\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s)$ qui est considéré comme étant similaire à $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}$ (étape de *remémoration*), (2) la modification de ce cas remémoré afin de proposer une solution $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}}$ de $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}$ (étape d'*adaptation*), et d'autres étapes non considérés dans cet article. Dans certains systèmes de RàPC, plusieurs cas sont remémorés avant d'être adaptés; dans cet article, cependant, on ne considérera que les remémorations et adaptation simples (avec un seul cas remémoré puis adapté).

Modèle de connaissances. Un système de RàPC s'appuie sur quatre *conteneurs de connaissances*. Le premier est la base de cas $\mathtt{BC}$ mentionnée plus haut.

Les connaissances du domaine $\mathtt{CD}$ expriment des connaissances à propos du vocabulaire avec lequel les cas sont représentés. $\mathtt{CD}$ peut être considéré comme un ensemble de contraintes sur ce vocabulaire. Par exemple, si "pomme" et "fruit" appartiennent à ce vocabulaire, la connaissances "Toute pomme est un fruit." indique qu'un cas impliquant une pomme qui n'est pas un fruit est incorrect.

Les connaissances pour la remémoration sont souvent représentées à l'aide d'une distance entre problèmes (il n'en sera guère question dans cet article).

Les connaissances d'adaptation $\mathtt{CA}$ sont utilisées durant l'adaptation. Dans cet article, $\mathtt{CA}$ est un ensemble de *règles d'adaptation* $\mathtt{ar}$. De façon générale, une telle règle peut être interprétée comme une fonction qui à $((\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s), \mathtt{x}^{\mathtt{cible}}) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{S}) \times \mathcal{P}$ associe $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}} \in \mathcal{S} \cup \{\mathtt{échec}\}$. Si $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}} = \mathtt{échec}$, cela signifie que la règle d'adaptation n'est pas applicable au problème d'adaptation $((\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s), \mathtt{x}^{\mathtt{cible}})$. Dans le cas contraire, le cas $(\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}, \mathtt{y}^{\mathtt{cible}})$ n'est pas nécessairement correct : le RàPC est en général un raisonnement hypothétique et le résultat qu'il produit n'est pas nécessairement correct. Afin d'augmenter la plausibilité que ce résultat soit correct, une valeur strictement positive $\mathtt{coût}$ est associée à une règle d'adaptation : on considérera que plus coût est bas, plus il est plausible que $(\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}, \mathtt{y}^{\mathtt{cible}})$ soit correct.

Représentation des connaissances. $\mathtt{BC}$ et $\mathtt{CD}$ sont des conteneurs de connaissances à propos de ce qu'*est* ou *n'est pas* un cas : un $(\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s) \in \mathtt{BC}$ indique que $\mathtt{y}^s$ *est* une solution correcte de $\mathtt{x}^s$, alors qu'une formule α de $\mathtt{CD}$ indique une contrainte sur ce qu'un cas correct doit être. Les connaissances d'adaptation, quant à elles, concernent les transformations, comment un cas est *modifié* en un autre cas.

Pour ces raisons, deux types de logiques pour représenter des connaissances en RàPC sont distinguées : les *logiques statiques* pour $\mathtt{BC}$ et $\mathtt{CD}$ et les *logiques de variations* pour les connaissances d'adaptation.

Dans cet article, la logique statique considérée est $(\mathcal{LG}, \models)$, qui sera présentée en section 3 et utilisée pour $\mathtt{BC}$ et $\mathtt{CD}$. La logique des variations $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ pour représenter les connaissances d'adaptation s'appuie sur la logique précédente et est présentée en section 4.

3 La logique statique $(\mathcal{LG}, \models)$

La logique statique peut être n'importe quelle logique classique utilisée en représentation des connaissances, que ce soit la logique propositionnelle, une logique de descriptions ou autre. Cependant, l'étude présentée dans cet article s'appuie sur la logique $(\mathcal{LG}, \models)$ décrite ci-dessous, associée à une discussion sur son expressivité. Cette logique est paramétrée par un groupe abélien infini $(\mathcal{G}, +)$.

3.1 Syntaxe de $(\mathcal{LG}, \models)$

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide donné de symboles : les éléments a de $\mathcal{V}$ sont appelés les *variables*. Un *atome* de $(\mathcal{LG}, \models)$ est une expression de la forme $(a = r)$ où $a \in \mathcal{V}$ et $r \in \mathcal{G}$. Une formule de $(\mathcal{LG}, \models)$ est soit un atome soit une expression d'une des formes suivantes : $\bot$, $\top$, $\neg\alpha$, $\alpha\wedge\beta$ et $\alpha \vee \beta$ où α et β sont deux formules de cette logique. Les autres connecteurs peuvent être définis de manière usuelle, comme des abréviations. En particulier, le connecteur $\rightarrow$ est défini par $\alpha \rightarrow \beta = \neg\alpha \vee \beta$. $\mathcal{LG}$ est l'ensemble des formules de cette logique. L'ensemble des variables apparaissant dans $\alpha \in \mathcal{LG}$ est dénoté par $\mathcal{V}(\alpha)$.
Un *littéral* est soit un atome (qu'on considérera comme un littéral *positif*) soit de la forme $\neg\alpha$ où α est un atome (ce sera alors un littéral *négatif*). Un *cube* est une conjonction de littéraux : il a la forme $\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ldots \wedge \ell_p$ où ℓ_k est un littéral pour $k \in [\![1, p]\!]$. Une formule est sous *FND* (forme normale disjonctive) si c'est une disjonction de cubes : $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \ldots \vee \gamma_q$ où γ_k est un cube, pour $k \in [\![1, q]\!]$.

3.2 Sémantique de $(\mathcal{LG}, \models)$

Une *interprétation* $\mathcal{I}$ est une fonction de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}$. Soit Ω l'ensemble des interprétations. Pour $\mathcal{I} \in \Omega$ et $\alpha \in \mathcal{LG}$, la relation "$\mathcal{I}$ est un modèle de α" (dénotée par $\mathcal{I} \models \alpha$) est définie récursivement comme suit (pour $a \in \mathcal{V}$, $r \in \mathcal{G}$ et $\alpha, \beta \in \mathcal{LG}$) :

- $\mathcal{I} \models \bot$ n'est jamais vrai ;
- $\mathcal{I} \models \top$ est toujours vrai ;
- $\mathcal{I} \models (a = r)$ si $\mathcal{I}(a) = r$;
- $\mathcal{I} \models \neg\alpha$ si $\mathcal{I} \not\models \alpha$;
- $\mathcal{I} \models \alpha \wedge \beta$ si $\mathcal{I} \models \alpha$ et $\mathcal{I} \models \beta$;
- $\mathcal{I} \models \alpha \vee \beta$ si $\mathcal{I} \models \alpha$ ou $\mathcal{I} \models \beta$.

Pour $\alpha \in \mathcal{LG}$, soit $\mathcal{M}(\alpha)$ l'ensemble des modèles de α. α est *satisfiable* (ou *cohérente*) si $\mathcal{M}(\alpha) \neq \varnothing$ et α est une *tautologie* si $\mathcal{M}(\alpha) = \Omega$. Par exemple, $\bot$ est insatisfiable et $\top$ est une tautologie La relation $\alpha \models \beta$ signifie que $\mathcal{M}(\alpha) \subseteq \mathcal{M}(\beta)$. La relation $\alpha \equiv \beta$ signifie que $\mathcal{M}(\alpha) = \mathcal{M}(\beta)$. Si $\mathcal{B}$ est un ensemble de formules, $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcap\{\mathcal{M}(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{B}\}$. $\mathcal{B} \models \alpha$ signifie que $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}(\alpha)$.

3.3 À propos de l'expressivité de $(\mathcal{LG}, \models)$

Chaque variable a de $(\mathcal{LG}, \models)$ a le même domaine $\mathcal{G}$: pour toute $\mathcal{I} \in \Omega$, $\mathcal{I}(a) \in \mathcal{G}$. Une modification de $(\mathcal{LG}, \models)$ consiste à préciser le domaine de chaque variable (p. ex. $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, un intervalle d'entiers $[\![m, n]\!]$ ou de rationnels $[r, s]$ —$m, n \in \mathbb{Z}$, $r, s \in \mathbb{Q}$). Par conséquent, ce formalisme contient les formalismes attributs-valeurs (avec des domaines d'attributs limités aux nombres, booléens et types énumérés) et les taxonomies (une taxonomie étant représentée par un ensemble d'implications, p. ex. $(\mathtt{apple} = 1) \rightarrow (\mathtt{fruit} = 1)$ signifie que toute pomme est un fruit). Pour simplifier la présentation, dans cet article, nous ne considérons que la logique statique $(\mathcal{LG}, \models)$, considérant que l'extension avec des types de variables différents ne devrait pas poser beaucoup de problèmes de modification.

3.4 Représenter des cas dans $(\mathcal{LG}, \models)$

Comme indiqué en section 2, les ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont supposés disjoints. Cela suggère de partitionner l'ensemble des variables en $\{\mathcal{V}_\mathcal{P}, \mathcal{V}_\mathcal{S}\}$: $\mathcal{V}_\mathcal{P}$ (resp., $\mathcal{V}_\mathcal{S}$) est l'ensemble des *variables de problèmes* (resp., *variables de solutions*). Ainsi, un problème (resp., une solution) est représenté par une formule dont les variables appartiennent à $\mathcal{V}_\mathcal{P}$ (resp., à $\mathcal{V}_\mathcal{S}$). Donc, un cas $(\mathtt{x}, \mathtt{y}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{S}$ peut être écrit $\mathtt{x} \wedge \mathtt{y}$: trouver la partie problème $\mathtt{x}$ et la partie solution $\mathtt{y}$ de $\mathtt{x} \wedge \mathtt{y}$ est facile puisque $\mathcal{V}_\mathcal{P} \cap \mathcal{V}_\mathcal{S} = \varnothing$.
Par ailleurs, il est supposé que les cas sources $(\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s)$ représentent des expériences spécifiques. Cela signifie que pour tout $(\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s) \in \mathtt{BC}$, $\mathcal{M}(\mathtt{x}^s \wedge \mathtt{y}^s)$ est un singleton $\{\mathcal{I}^s\}$. Par conséquent, $\mathtt{x}^s$ et $\mathtt{y}^s$ peuvent être écrits comme conjonctions d'atomes sur toutes les variables de, respectivement, $\mathcal{V}_\mathcal{P}$ et $\mathcal{V}_\mathcal{S}$: $\mathtt{x}^s \equiv \bigwedge_{a\in\mathcal{V}_\mathcal{P}}(a = \mathcal{I}^s(a))$ et $\mathtt{y}^s \equiv \bigwedge_{a\in\mathcal{V}_\mathcal{S}}(a = \mathcal{I}^s(a))$.

4 La logique de variations $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$

Étant donné une logique statique qui peut être utilisée pour représenter des cas et des connaissances du domaine, une logique de variations peut être définie pour représenter, en particulier, des connaissances d'adaptation. Cette section décrit la logique de variations $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ construite à partir de la logique statique $(\mathcal{LG}, \models)$: sa syntaxe, sa sémantique, certaines de ses propriétés et les opérateurs sur ces logiques qui vont être utiles pour représenter des règles d'adaptation.

4.1 Syntaxe de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$

Pour commencer par un exemple, soit $\varphi = a^{\texttt{+}5} \wedge \neg b^{8\bullet} \wedge b^{\bullet 2}$ une formule de cette logique, pour $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$. φ indique un changement de l'attribut a de la valeur r, pour un $r \in \mathbb{Z}$, à la valeur $r + 5$ et un changement de l'attribut b d'une valeur différente de 8 à la valeur 2. Les expressions $\texttt{+}5$, $8\bullet$ et $\bullet 2$ apparaissant dans φ sont appelés symboles de variation.
Plus généralement, l'ensemble des *symboles de variation* est défini par :

$$\mathcal{D} = \{\texttt{+}r,\ \ r\bullet,\ \ \bullet r \mid r \in \mathcal{G}\}$$

Un symbole de variation additionnel $\texttt{-}r$ est défini comme abréviation de $\texttt{+}(-r)$.
Un *atome* de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ est une expression de la forme a^v où a est une variable et v est un symbole de variation. Une *formule* de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ est soit un atome de cette logique,

soit d'une des formes suivantes : $\bot$, $\top$, $\neg\varphi$, $\varphi\wedge\psi$ et $\varphi\vee\psi$ où φ et ψ sont deux formules de cette logique. Les autres connecteurs sont définies comme des abréviations. L'ensemble des formules est noté par $\Delta\mathcal{LG}$. Une *formule de variations* est par définition un élément de $\Delta\mathcal{LG}$. L'ensemble des variables apparaissant dans $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ est noté $\mathcal{V}(\varphi)$.

Les notions de littéraux, positifs ou négatifs, et de cubes, sont similaires à ceux de $(\mathcal{LG}, \models)$, par exemple, $a^{5\bullet} \wedge \neg a^{+2} \wedge \neg b^{\bullet 6}$ est un cube avec un littéral positif et deux littéraux négatifs. $\bot$ est aussi considéré comme un cube ($\bot$ peut être vu comme la conjonction $A \wedge \neg A$ pour A est un atome fixé de façon arbitraire).

4.2 Sémantique de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$

Chaque symbole de variation est interprété comme une relation binaire sur $\mathcal{G}$. Formellement, à tout $v \in \mathcal{D}$ est associé $\langle v\rangle \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ défini de la façon suivante (pour $r \in \mathcal{G}$):

$$\begin{aligned}\langle +r\rangle &= \{(x, y) \in \mathcal{G}^2 \mid y = x + r\}\\ \langle r\bullet\rangle &= \{(r, x) \mid x \in \mathcal{G}\}\\ \langle \bullet r\rangle &= \{(x, r) \mid x \in \mathcal{G}\}\end{aligned}$$

Soit $\Delta\Omega = \Omega \times \Omega$: c'est l'ensemble des interprétations utilisées pour définir la sémantique de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$: une interprétation de $\Delta\Omega$ est par conséquent un couple $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ de Ω. Dans la suite, $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ est simplement notée $\mathcal{IJ}$.

La relation affirmant qu'une $\mathcal{IJ} \in \Delta\Omega$ est un modèle de $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ est définie récursivement comme suit :

- $\mathcal{IJ} \models a^v$ si $(\mathcal{I}(a), \mathcal{J}(a)) \in \langle v\rangle$, pour tout atome a^v de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$;
- $\mathcal{IJ} \models \neg\varphi$ si $\mathcal{IJ} \not\models \varphi$, pour $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$;
- $\mathcal{IJ} \models \varphi \wedge \psi$ si $\mathcal{IJ} \models \varphi$ et $\mathcal{IJ} \models \psi$, pour $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{LG}$;
- $\mathcal{IJ} \models \varphi \vee \psi$ si $\mathcal{IJ} \models \varphi$ ou $\mathcal{IJ} \models \psi$, pour $\varphi, \psi \in \Delta\mathcal{LG}$.

L'ensemble des modèles de $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ est noté $\mathcal{M}(\varphi)$. Pour une base de connaissances $\mathcal{B}$ de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$, $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcap\{\mathcal{M}(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{B}\}$. La relation de conséquence logique est définie comme d'habitude : $\varphi \models \psi$ si $\mathcal{M}(\varphi) \subseteq \mathcal{M}(\psi)$ et $\mathcal{B} \models \varphi$ si $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}(\psi)$. De même, $\varphi \equiv \psi$ si $\mathcal{M}(\varphi) = \mathcal{M}(\psi)$. Finalement, φ est *satisfiable* (ou *cohérente*) si $\mathcal{M}(\varphi) \neq \varnothing$.

Dans l'introduction, un autre symbole de variation a été utilisé : $=r$ (pour $r \in \mathcal{G}$). Il a la sémantique suivante (pour $a \in \mathcal{V}$) : $\mathcal{IJ} \models a^{=r}$ si $\mathcal{I}(a) = \mathcal{J}(a) = r$. Par conséquent, $a^{=r}$ peut être vu comme une abréviation du cube $a^{r\bullet} \wedge a^{\bullet r} \wedge a^{+0}$.

4.3 Propriétés de base de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$

Proposition 1 *Étant donné la conjonction de deux littéraux ℓ_1 et ℓ_2 portant sur la même variable, un troisième littéral ℓ_3 peut parfois être déduit, qui est une conséquence logique des deux premiers. Dans ce cas, on aura $\ell_1 \wedge \ell_2 \equiv \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3$. On a, en effet, pour $r, s \in \mathcal{G}$:*

$$\begin{aligned}
a^{r\bullet} \wedge a^{\bullet s} &\models a^{+(s-r)} & a^{+r} \wedge a^{s\bullet} &\models a^{\bullet(r+s)}\\
a^{+r} \wedge a^{\bullet s} &\models a^{(s-r)\bullet} & a^{r\bullet} \wedge \neg a^{\bullet s} &\models \neg a^{+(s-r)}\\
a^{\bullet r} \wedge \neg a^{s\bullet} &\models \neg a^{+(r-s)} & a^{+r} \wedge \neg a^{s\bullet} &\models \neg a^{\bullet(r+s)}\\
a^{+r} \wedge \neg a^{\bullet s} &\models \neg a^{(s-r)\bullet} & a^{r\bullet} \wedge \neg a^{\bullet s} &\models \neg a^{+(s-r)}\\
a^{r\bullet} \wedge \neg a^{+s} &\models \neg a^{\bullet(r+s)} & &
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $r, s \in \mathcal{G}$ avec $r \neq s$, les cubes suivants sont insatisfiables : $a^{r\bullet} \wedge a^{s\bullet}$, $a^{+r} \wedge a^{+s}$ et $a^{\bullet r} \wedge a^{\bullet s}$.
Enfin, pour $r, s, t \in \mathcal{G}$, si $t \neq s - r$ alors $a^{r\bullet} \wedge a^{\bullet s} \wedge a^{+t}$ est insatisfiable.

La définition et la proposition suivantes concernent les formes normales de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ et s'appuient sur le fait que $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe abélien infini. La section 6.2 étend ces résultats sous d'autres hypothèses.

Definition 1 (Formes normales FND et FNDCN) *Une formule de variations φ est sous FND (forme normale disjonctive) si c'est une disjonction de cubes: $\varphi = \theta_1 \vee \theta_2 \vee \ldots \vee \theta_p$ où θ_k est un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$.*
Soit θ un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ avec comme seule variable a. θ est normal si une des conditions suivantes est respectée :

- *(i) $\theta = \bot$;*
- *(ii) θ contient exactement 3 littéraux positifs, des formes $a^{r\bullet}$, $a^{\bullet s}$ et a^{+t} avec $r, s, t \in \mathcal{G}$ et $t = s - r$, et il ne contient aucun littéral négatif ;*
- *(iii) θ contient exactement un littéral positif a^v et p littéraux négatifs ($p \in \mathbb{N}$) m_1, m_2, ..., m_p utilisant un symbole de variation d'une forme différente de celle de v (p. ex. si $v = +r$ alors $m_k = \neg a^w$ où $w \neq +s$ pour tout $s \in \mathcal{G}$) ; de plus, pour tout littéral négatif $\neg a^w$, θ contient aussi la conséquence $\neg a^x$ de $a^v \wedge \neg a^w$ selon la proposition 1 (p. ex. si $v = +r$ et $w = s\bullet$, alors $x = \bullet(s + r)$) ;*
- *(iv) θ ne contient que des littéraux négatifs, de tout type.*

Soit θ un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Pour a, une variable apparaissant dans θ, soit θ_a la conjonction des littéraux de θ ayant a comme variable. θ est un cube normal *si tout θ_a est normal, pour tout a, variable de θ.*
Une formule $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ est sous FNDCN (FND avec cubes normaux) si elle est sous FND et si tous les cubes qui la composent sont normaux.

Proposition 2 *Toute formule $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ peut être mise sous FND et sous FNDCN : il existe $\varphi_{\text{FND}} \in \Delta\mathcal{LG}$ (resp. $\varphi_{\text{FNDCN}} \in \Delta\mathcal{LG}$) qui est sous FND (resp. FNDCN) et telle que $\varphi \equiv \varphi_{\text{FND}}$ (resp. $\varphi \equiv \varphi_{\text{FNDCN}}$).*

Le fait que φ puisse être mise sous FND peut être prouvé comme cela se fait, p. ex., en logique propositionnelle. Le fait que tout cube peut être normalisé s'appuie en particulier sur la proposition 1.
Comme dans beaucoup de logique le problème de la conséquence logique et le problème de la satisfiabilité sont fortement liés dans $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. For exemple, $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \psi$ ssi $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\psi$ n'est pas satisfiable. Or, le problème

de satisfiabilité peut être résolu en utilisant les principes de la méthode des tableaux sémantiques (voir, p. ex., [10]), qui, pour une logique s'appuyant sur les connecteurs propositionnels revient à construire une formule sous FND représentée par un arbre dont chaque branche représente un cube. La proposition suivante est alors utile pour concevoir un algorithme fondé sur la méthode des tableaux sémantiques pour $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$:

Proposition 3 *Les résultats ci-dessous peuvent être utilisés pour tester si une formule des variations est satisfiable :*

(a) *Pour $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$, soit φ_{FND} une formule sous FND telle que $\varphi_{\text{FND}} \equiv \varphi$. Alors, φ est satisfiable ssi φ_{FND} est satisfiable.*

(b) *Soit $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ une formule sous FND : $\varphi = \theta_1 \vee \theta_2 \ldots \vee \theta_p$ où chaque θ_k est un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Alors φ est satisfiable ssi au moins un des θ_k est satisfiable ($k \in [\![1, p]\!]$).*

(c) *Soit θ un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Pour a, variable apparaissant dans θ, soit θ_a la conjunction des littéraux de θ ayant a comme variable. Alors, θ est satisfiable ssi chaque θ_a est satisfiable.*

(d) *Un cube normal θ_a avec une seule variable est satisfiable ssi $\theta_a \neq \bot$ (cela signifie que, si une des conditions (ii), (iii) et (iv) de la définition 1 est vérifiée, alors θ_a est satisfiable).*

4.4 Opérateurs sur $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$

Cette section présente différents opérateurs sur la logique $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ qui seront utilisés dans les sections suivantes. Chacun d'entre eux a une définition sémantique et vérifie le principe d'indépendance à la syntaxe : si une formule apparaissant dans la définition d'un opérateur est représentée par une formule équivalente, alors le résultat de l'application de l'opérateur est inchangé à l'équivalence logique près. Chacun de ces opérateurs est défini soit à travers une définition classique, soit dans une proposition qui affirme son existence. Les preuves de ces propositions sont données dans [4]. Puis, la façon dont ces opérateurs sont calculés est décrite dans le cas où les formules impliquées sont des cubes.

Une formule de variations φ peut être vue comme une représentation d'une relation binaire sur Ω puisque $\mathcal{M}(\varphi) \subseteq \Omega \times \Omega$. La proposition suivante montre que l'inverse d'une relation $\mathcal{M}(\varphi)$ peut être représentée par une formule de variations $\overleftarrow{\varphi}$.

Proposition 4 *Pour toute $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$, il existe une formule de variations notée $\overleftarrow{\varphi}$ telle que*

$$\mathcal{M}(\overleftarrow{\varphi}) = \{\mathcal{J}\mathcal{I} \mid \mathcal{I}\mathcal{J} \in \mathcal{M}(\varphi)\}$$

En d'autres termes, $\mathcal{J}\mathcal{I} \models \overleftarrow{\varphi}$ ssi $\mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi$.

Le calcul de $\overleftarrow{\varphi}$ est linéaire : il consiste à remplacer chaque occurrence d'un symbole de variations v par $\overleftarrow{v}$ défini comme suit :

$$\overleftarrow{{}^{+}r} = {}^{-}r \qquad \overleftarrow{r^{\bullet}} = {}^{\bullet}r \qquad \overleftarrow{{}^{\bullet}r} = r^{\bullet} \qquad (\text{pour } r \in \mathcal{G})$$

Par exeample, $\overleftarrow{a^{+1} \wedge a^{\bullet 2} \wedge c^{-2}} = a^{-1} \wedge a^{2\bullet} \wedge c^{+2}$.

Proposition 5 *Pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{LG}$ il existe une formule de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ notée $\alpha \rhd \beta$ et qui se lit "α devient β", telle que $\mathcal{M}(\alpha \rhd \beta) = \mathcal{M}(\alpha) \times \mathcal{M}(\beta)$.*
En d'autres termes, $\mathcal{I}\mathcal{J} \models \alpha \rhd \beta$ ssi $\mathcal{I} \models \alpha$ et $\mathcal{J} \models \beta$.

À présent, considérons $\bigwedge_{i=1}^{p} \ell_i$ et $\bigwedge_{j=1}^{q} m_j$, deux cubes de $(\mathcal{LG}, \models)$: $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_p, m_1, m_2, \ldots, m_q$ sont $p + q$ littéraux. L'application de $\rhd$ sur ces cubes peut être calculée ainsi :

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{p} \ell_i\right) \rhd \left(\bigwedge_{j=1}^{q} m_j\right) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{p} \ell_i \rhd \top\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{q} \top \rhd m_j\right)$$

Enfin, il est suffisant de définir $\alpha \rhd \beta$ quand l'un parmi α et β est un littéral et l'autre est $\top$ (pour $a \in \mathcal{V}$ et $r \in \mathcal{G}$) :

$$\begin{array}{ll} (a = r) \rhd \top \equiv a^{r\bullet} & \neg(a = r) \rhd \top \equiv \neg a^{r\bullet} \\ \top \rhd (a = r) \equiv a^{\bullet r} & \top \rhd \neg(a = r) \equiv \neg a^{\bullet r} \end{array}$$

L'opérateur $\rhd$ peut être utilisé pour l'apprentissage de connaissances d'adaptation utilisant l'heuristique des différences introduite en section 1. Considérons les cas sources suivants exprimés dans $(\mathcal{LG}, \models)$ avec $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$ et où $\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \{a, b\}$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{S}} = \{c, d\}$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{x}^1 \wedge \mathrm{y}^1 & = & (a = 1) \wedge (b = 2) \wedge (c = 3) \wedge (d = 4) \\ \mathrm{x}^2 \wedge \mathrm{y}^2 & = & (a = 2) \wedge (b = 0) \wedge (c = 2) \wedge (d = 6) \\ \mathrm{x}^3 \wedge \mathrm{y}^3 & = & (a = 3) \wedge (b = 1) \wedge (c = 1) \wedge (d = 8) \end{array}$$

La variation du cas $(\mathrm{x}^k, \mathrm{y}^k)$ au case $(\mathrm{x}^\ell, \mathrm{y}^\ell)$ est représentée par $\Delta^{k\ell} = (\mathrm{x}^k \wedge \mathrm{y}^k) \rhd (\mathrm{x}^\ell \wedge \mathrm{y}^\ell)$. Selon ce qui est présenté ci-dessus, comme les cas sources $\mathrm{x}^s \wedge \mathrm{y}^s$ sont des conjonctions de littéraux positifs de $(\mathcal{LG}, \models)$, le résultat $\Delta^{k\ell}$ est une conjonction d'atomes des formes $a^{r\bullet}$ et $a^{\bullet r}$ ($r \in \mathcal{G}$). En utilisant la première conséquence logique de la proposition 1, les atomes des formes a^{+r} sont ajoutés aux $\Delta^{k\ell}$, qui mettent en évidence les variations. Par exemple

$$\Delta^{12} \equiv a^{+1} \wedge a^{1\bullet} \wedge a^{\bullet 2} \wedge b^{-2} \wedge b^{2\bullet} \wedge b^{\bullet 0} \\ \wedge c^{-1} \wedge c^{3\bullet} \wedge c^{\bullet 2} \wedge d^{+2} \wedge d^{4\bullet} \wedge d^{\bullet 6}$$

Utiliser un algorithme d'extraction de motifs fréquents [7] sur l'ensemble d'apprentissage $\{\Delta^{k\ell}\}_{k\ell}$ permet de mettre en évidence des atomes a^v apparaissant dans des sous-ensembles de cet ensemble d'apprentissage. Par exemple, pour $(k, \ell) \in \{(1, 2), (2, 3)\}$, le motif $\{a^{+1}, c^{-1}, d^{+2}\}$ peut être mis en évidence et permet de créer la formule $\varphi = a^{+1} \wedge c^{-1} \wedge d^{+2}$ qui peut être utilisée pour représenter une règle d'adaptation, comme on le verra plus loin. On peut noter que $\overleftarrow{\varphi}$ peut également être apprise : elle correspond à $(k, \ell) \in \{(2, 1), (3, 2)\}$.

Proposition 6 *Pour toute $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$, il existe $\mathsf{G}(\varphi) \in \mathcal{LG}$ et $\mathsf{D}(\varphi) \in \mathcal{LG}$ (les projections* gauche *et* droite *de φ) telles que :*

$$\mathcal{M}(\mathsf{G}(\varphi)) = \{\mathcal{I} \in \Omega \mid \textit{il existe } \mathcal{J} \in \Omega, \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi\} \textit{ et}$$
$$\mathcal{M}(\mathsf{D}(\varphi)) = \{\mathcal{J} \in \Omega \mid \textit{il existe } \mathcal{I} \in \Omega, \mathcal{I}\mathcal{J} \models \varphi\}$$

Si α *et* β *sont deux formules satisfiables de* $(\mathcal{LG}, \models)$ *alors* $\mathsf{G}(\alpha \triangleright \beta) \equiv \alpha$ *et* $\mathsf{D}(\alpha \triangleright \beta) \equiv \beta$.

Le calcul des projections gauche et droite d'un cube peut être effectué en mettant un cube sous forme normale et en utilisant les équivalences suivantes :

$$\text{si } \varphi = \bigwedge_{k=1}^{p} \ell_k \text{ est un cube normal de } (\Delta\mathcal{LG}, \models),$$

$$\text{alors } \mathsf{G}(\varphi) \equiv \bigwedge_{k=1}^{p} \mathsf{G}(\ell_k) \text{ et } \mathsf{D}(\varphi) \equiv \bigwedge_{k=1}^{p} \mathsf{D}(\ell_k)$$

$$\mathsf{G}(a^{+r}) \equiv \mathsf{D}(a^{+r}) \equiv \mathsf{G}(a^{\bullet r}) \equiv \mathsf{D}(a^{r\bullet}) \equiv \top$$

$$\mathsf{G}(\neg a^{+r}) \equiv \mathsf{D}(\neg a^{+r}) \equiv \mathsf{G}(\neg a^{\bullet r}) \equiv \mathsf{D}(\neg a^{r\bullet}) \equiv \top$$

$$\mathsf{G}(a^{r\bullet}) \equiv (a = r) \quad \mathsf{G}(\neg a^{r\bullet}) \equiv \neg(a = r)$$

$$\mathsf{D}(a^{\bullet r}) \equiv (a = r) \quad \mathsf{D}(\neg a^{\bullet r}) \equiv \neg(a = r)$$

Definition 2 *Soit* $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ *et* $a \in \mathcal{V}$. a *est dite* variable invariante *de* φ *s'il existe* $\psi \in \Delta\mathcal{LG}$ *telle que* $\varphi \equiv \psi$ *et* $a \notin \mathcal{V}(\psi)$. *L'ensemble des variables invariantes de* φ *est noté* $\mathsf{Inv}(\varphi)$. *On a donc* $\mathcal{V} \setminus \mathcal{V}(\varphi) \subseteq \mathsf{Inv}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}$.

Une variable d'un cube normal est invariante ssi $a \notin \mathcal{V}(\theta)$. En revanche, il existe des formules de variation φ telles que $\mathsf{Inv}(\varphi) \neq \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}(\varphi)$. Par exemple, avec $\varphi = (a^{+1} \wedge a^{+2}) \vee b^{4\bullet}$, on a $a \in \mathcal{V}(\varphi)$ mais $a \in \mathsf{Inv}(\varphi)$ puisque $\varphi \equiv b^{4\bullet}$.

5 Représenter des règles d'adaptation

Le formalisme $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ a été conçu pour représenter des variations entre cas sources en s'inspirant de notations issues de l'apprentissage de connaissances d'adaptation. Le résultat d'un tel processus d'apprentissage est un ensemble de règles d'adaptation qui peuvent être représentées à l'aide de cette logique et c'est ce qui est examiné dans cette section.

5.1 Exemple motivant l'introduction de l'opérateur *ceteris paribus*

Considérons à nouveau la règle d'adaptation dans le domaine culinaire qui a été présentée en introduction. Écrite de façon conjonctive, elle correspond au cube suivant de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$, pour $\mathcal{G} = \mathbb{Q}$: $\varphi = \mathtt{dessert}^{=1} \wedge \mathtt{\#œufs}^{-2} \wedge \mathtt{\#bananes}^{+1}$. À présent, soit une recette de dessert avec 2 œufs, aucune banane, 50 grammes de farine et 20 grammes de beurre. Elle peut être représentée par la formule de $(\mathcal{LG}, \models)$ $\alpha = (\mathtt{dessert} = 1) \wedge (\mathtt{\#œufs} = 2) \wedge (\mathtt{\#bananes} = 0) \wedge (\mathtt{farine}_{\mathtt{gramme}} = 50) \wedge (\mathtt{beurre}_{\mathtt{gramme}} = 20)$ (en ne considérant pas d'autres variables). La question qui se pose est comment la formule φ peut-elle être appliquée à α ?

Pour traiter cette question, l'idée est d'abord de définir la formule des variations θ qui représente la transformation de α par φ, sachant que le résultat final attendu sera alors $\beta = \mathsf{D}(\theta)$. Soit $\mathcal{IJ}$ un modèle de θ. Cette transformation "part" de α donc $\mathcal{I}$ devrait être un modèle de α, ce qui équivaut à écrire que (a) $\mathcal{IJ} \models \alpha \triangleright \top$. De plus, θ doit spécialiser φ, i.e. $\theta \models \varphi$, ce qui entraîne que (b) $\mathcal{IJ} \models \varphi$. Si (a) et (b) étaient les seules conditions à donner sur $\mathcal{IJ}$, cela impliquerait que $\theta \equiv (\alpha \triangleright \top) \wedge \varphi$ et donc, dans cet exemple, le résultat de l'application sur α de φ serait $\beta = (\mathtt{dessert} = 1) \wedge (\mathtt{\#œufs} = 0) \wedge (\mathtt{\#bananes} = 1)$. Pour les variables $\mathtt{farine}_{\mathtt{gramme}}$ et $\mathtt{beurre}_{\mathtt{gramme}}$, cela soulève le problème suivant : elles n'apparaissent pas dans β.En effet, ces deux variables sont invariantes par φ. Pour traiter cela, le postulat suivant est posé : si une variable est invariante dans φ alors, l'application sur α de φ doit laisser cette variable inchangée. Cela suggère une troisième condition : (c) si $a \in \mathsf{Inv}(\varphi)$ alors a est interprétée dans β de la même façon qu'elle est interprétée dans α ; formellement, $\{\mathcal{I}(a) \mid \mathcal{IJ} \in \mathcal{M}(\theta)\} = \{\mathcal{J}(a) \mid \mathcal{IJ} \in \mathcal{M}(\theta)\}$. Si α, comme dans cet exemple, est un cube, la condition (c) signifie simplement que si un littéral ℓ avec la variable a apparaît dans α alors β contient le même littéral ℓ. Une autre manière de formuler cela consiste à ajouter à φ une conjonction avec l'atome a^{+0} pour toute $a \in \mathsf{Inv}(\varphi)$, ce qui mène à une formule notée $\mathsf{cp}\,(\varphi)$, définie formellement ci-dessous, dans la définition 3.

Par conséquent, en prenant en compte la condition (c) amène à la transformation θ et à l'application β :

$$\begin{aligned}\theta = {} & \mathtt{dessert}^{1\bullet} \wedge \mathtt{dessert}^{=1} \wedge \mathtt{\#œufs}^{2\bullet} \wedge \mathtt{\#œufs}^{-2} \\ & \wedge \mathtt{\#bananes}^{0\bullet} \wedge \mathtt{\#bananes}^{+1} \wedge \mathtt{farine}^{50\bullet}_{\mathtt{gramme}} \\ & \wedge \mathtt{farine}^{+0}_{\mathtt{gramme}} \wedge \mathtt{beurre}^{20\bullet}_{\mathtt{gramme}} \wedge \mathtt{beurre}^{+0}_{\mathtt{gramme}} \\ \beta = {} & (\mathtt{dessert} = 1) \wedge (\mathtt{\#œufs} = 0) \wedge (\mathtt{\#bananes} = 1) \\ & \wedge (\mathtt{farine}_{\mathtt{gramme}} = 50) \wedge (\mathtt{beurre}_{\mathtt{gramme}} = 20)\end{aligned}$$

À présent, la définition de $\mathsf{cp}\,(\varphi)$ peut être donnée :

Definition 3 *Soit* $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ *et* $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ *avec* $\mathcal{W} \neq \varnothing$. *Le* ceteris paribus [1] *de* φ *pour* $\mathcal{W}$ *est défini par*

$$\mathsf{cp}_{\mathcal{W}}\,(\varphi) = \varphi \wedge \bigwedge \{a^{+0} \mid a \in \mathsf{Inv}(\varphi) \cap \mathcal{W}\}$$

$\mathsf{cp}\,(\varphi)$ *est une abréviation de* $\mathsf{cp}_{\mathcal{V}}\,(\varphi)$ *(toutes les variables sont considérées dans* $\mathsf{cp}\,(\varphi)$*).*

5.2 Appliquer une formule de variation sur une formule statique

Dans ce qui précède, on a mis en évidence la transformation de α par φ — $\theta = (\alpha \triangleright \top) \wedge \mathsf{cp}\,(\varphi)$ — et le résultat de cette transformation — $\beta = \mathsf{D}(\theta)$. Une contrainte peut être ajoutée au résultat de cette transformation. Si cette contrainte est représentée par $\gamma \in \mathcal{LG}$, alors il est possible de définir la transformation et l'application d'une formule de variation sur une formule statique en tenant compte de γ :

Definition 4 *Soit* $\alpha, \gamma \in \mathcal{LG}$ *et* $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$. *La transformation sur* α *de* φ *avec contrainte* γ *est la formule* $\mathsf{transf}(\alpha, \varphi, \gamma) \in \Delta\mathcal{LG}$ *définie par*

$$\mathsf{transf}(\alpha, \varphi, \gamma) = (\alpha \triangleright \gamma) \wedge \mathsf{cp}\,(\varphi)$$

1. L'expression latine *ceteris paribus* signifie "toute chose étant égale par ailleurs".

L'application sur α *de* φ *avec contrainte* γ *est la formule* $\mathsf{appl}(\alpha, \varphi, \gamma) \in \mathcal{LG}$ *définie par*

$$\mathsf{appl}(\alpha, \varphi, \gamma) = \mathsf{D}(\mathsf{transf}(\alpha, \varphi, \gamma)) = \mathsf{D}((\alpha \rhd \gamma) \wedge \mathsf{cp}\,(\varphi))$$

La transformation (resp. application) de α sur φ sans contrainte est simplement $\mathsf{transf}(\alpha, \varphi, \top)$ (resp. $\mathsf{appl}(\alpha, \varphi, \top)$).

5.3 Représentation des règles d'adaptation

Soit $\mathtt{adPb} = ((\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s), \mathtt{x}^{\mathtt{cible}}) \in \mathtt{BC} \times \mathcal{P}$ un problème d'adaptation et $\mathtt{ar}$, une règle d'adaptation. Trois questions peuvent être posées : (Q1) $\mathtt{ar}$ est-elle applicable pour résoudre $\mathtt{adPb}$? (Q2) Si la réponse à la question précédente est oui, quel est le résultat $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}} \in \mathcal{S}$ de l'application de $\mathtt{ar}$ sur $\mathtt{adPb}$? (Q3) À quel point l'assertion "$\mathtt{y}^{\mathtt{cible}}$ résout $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}$" est-elle plausible ? Pour répondre aux questions (Q1) et (Q2), une formule de variation φ est utilisée, comme expliqué ci-dessous. La réponse proposée à la question (Q3) utilise un nombre strictement positif $\mathtt{coût}$ qui caractérise l'effort d'adaptation, i.e. le risque pris en appliquant $\mathtt{ar}$ sur le problème d'adaptation (plus haut est ce coût, plus il y a de risque que l'adaptation donne un résultat incorrect).

Ci-dessous, une proposition de formalisation d'une règle d'adaptation est donnée, qui explique comment les questions (Q1) à (Q3) sont traitées :

Definition 5 *Une* règle d'adaptation *est un couple* $\mathtt{ar} = (\varphi, \mathtt{coût})$ *où* φ *est une formule de variation et* $\mathtt{coût}$ *est un rationnel strictement positif appelé* coût *de* $\mathtt{ar}$.
Soit $\mathtt{adPb} = ((\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s), \mathtt{x}^{\mathtt{cible}})$ *un problème d'adaptation. L'application de* $\mathtt{ar}$ *sur* $\mathtt{adPb}$ *est la formule statique suivante :*

$$\beta = \mathsf{appl}(\mathtt{x}^s \wedge \mathtt{y}^s, \varphi, \mathtt{x}^{\mathtt{cible}})$$

La règle $\mathtt{ar}$ *est dite* applicable *sur* $\mathtt{adPb}$ *si* β *est satisfiable. Si* $\mathtt{ar}$ *est applicable sur* $\mathtt{adPb}$ *alors l'*application *de* $\mathtt{ar}$ *sur* $\mathtt{adPb}$ *donne une solution satisfiable* $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}}$ *telle que* $\beta \equiv \mathtt{x}^{\mathtt{cible}} \wedge \mathtt{y}^{\mathtt{cible}}$.
La valeur $\mathtt{coût}$ *caractérise la fiabilité de l'assertion "*$\mathtt{y}^{\mathtt{cible}}$ *résout* $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}}$*" (plus petit ce coût est, plus fiable cette assertion est supposée être).*

Pour reprendre l'exemple de la section 5.1, avec $\mathtt{x}^s \wedge \mathtt{y}^s = \alpha$ et $\mathtt{x}^{\mathtt{cible}} = (\mathtt{dessert} = 1) \wedge (\mathtt{\#œufs} = 0)$ (i.e. "Je veux un dessert sans œufs."), $\mathtt{ar} = (\varphi, \mathtt{coût})$ est applicable au problème d'adaptation $\mathtt{adPb} = ((\mathtt{x}^s, \mathtt{y}^s), \mathtt{x}^{\mathtt{cible}})$ et le résultat est $\mathtt{y}^{\mathtt{cible}} \equiv (\mathtt{\#bananes} = 1) \wedge (\mathtt{farine}_{\mathtt{gramme}} = 50) \wedge (\mathtt{beurre}_{\mathtt{gramme}} = 20)$.

6 Situations dans lesquelles $(\mathcal{G}, +)$ n'est pas un groupe abélien infini

Dans les sections précédentes, $(\mathcal{G}, +)$ est supposé être un groupe abélien infini. Cette section examine d'autres situations conduisant à des modifications dans la vérification de la satisfiabilité des formules de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Deux situations sont envisagées : tout d'abord le cas où $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe abélien fini, ensuite le cas où $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble d'un groupe abélien $(\mathcal{H}, +)$, mais n'a pas une structure de groupe, donc en particulier $\mathcal{G}$ n'est pas stable pour $+$ (autrement dit il existe $r, s \in \mathcal{G}$ tels que $r + s \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{G}$) ou pour l'opposé (i.e. il existe $r \in \mathcal{G}$ tel que $-r \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{G}$). D'autres situations (comme par exemple le cas où $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe non abélien) ne sont pas envisagées ici.

La notion principale considérée ici est celle de cube normal : l'idée derrière cette notion est qu'un cube normal est soit égal à $\perp$, soit satisfiable. Ainsi, le test de satisfiabilité sur les cubes normaux devrait consister en un simple test $\theta \neq \perp$ au niveau syntaxique. Pour les groupes infinis, cela est détaillé dans la section 4.3 : définition 1 et proposition 2.

6.1 $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe fini

Quand $(\mathcal{G}, +)$ est un groupe abélien infini, tout cube contenant uniquement des littéraux positifs est satisfiable. Ceci n'est plus le cas si $\mathcal{G}$ est fini. Par exemple, le cube $\neg a^{0\bullet} \wedge \neg a^{1\bullet}$ est satisfiable dans, par exemple, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}$, mais pas dans $\mathcal{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

La solution consiste à faire disparaître les littéraux négatifs dans les cubes normaux, ce qui est possible puisque, si $\mathcal{G}$ est fini, tout littéral négatif est équivalent à une disjonction de littéraux positifs :

$$\bigvee_{r \in A} \neg a^{r\bullet} \equiv \bigvee_{s \in \mathcal{G} \setminus A} a^{s\bullet} \qquad \neg a^{+r} \equiv \bigvee_{s \in \mathcal{G} \setminus \{r\}} a^{+s} \qquad \neg a^{\bullet r} \equiv \bigvee_{s \in \mathcal{G} \setminus \{r\}} a^{\bullet s} \tag{1}$$

Ainsi, après mise de $\varphi \in \Delta\mathcal{LG}$ en forme normale négative (i.e. formule dans laquelle $\neg$ n'apparaît que devant des atomes) et application des équivalences (1) de gauche à droite, la formule obtenue ne contient plus de $\neg$. Appliquer alors la distributivité de $\wedge$ sur $\vee$ donne une FND de cubes contenant seulement des conjonctions de littéraux positifs. On peut alors prouver qu'un tel cube est incohérent si et seulement si il existe $a \in \mathcal{V}$ tel que θ contient trois atomes de la forme $a^{r\bullet}$, a^{+s} et $a^{\bullet t}$ avec $r + s \neq t$. La définition suivante s'appuie sur ces considérations :

Definition 6 (Cubes normaux lorsque $\mathcal{G}$ est fini) *Si* $(\mathcal{G}, +)$ *est un groupe fini, alors un cube* θ *de* $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ *est soit* $\perp$*, soit est une conjonction d'atomes tel que, pour chaque variable* a *apparaissant dans* θ *:*

- *soit* a *apparaît dans un unique atome de* θ *;*
- *soit* a *apparaît dans exactement trois atomes de* θ*, de la forme* $a^{r\bullet}$*,* a^{+s} *et* $a^{\bullet t}$ *avec* $r + s = t$*.*

Proposition 7 *si* $(\mathcal{G}, +)$ *est un groupe abélien fini, un cube normal de* $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ *est satisfiable si et seulement si il est différent de* $\perp$*.*

6.2 $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble infini d'un groupe $(\mathcal{H}, +)$

Dans cette situation, soit θ un cube de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. L'idée principale consiste à transformer θ en un cube normal θ' de $(\Delta\mathcal{LH}, \models)$ grâce à la définition 1 et à la proposition 2.

Si $\theta' \in \Delta\mathcal{LG}$, autrement dit si la transformation de θ en θ' n'a pas introduit d'atome avec une valeur $r \notin \mathcal{G}$, alors θ' est aussi un cube normal de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$.
En revanche, si $\theta' \notin \Delta\mathcal{LG}$, alors un atome de $\Delta\mathcal{LH}$ n'appartenant pas à $\Delta\mathcal{LG}$ est apparu dans la transformation, en raison de la proposition 1. Deux sous-cas sont à considérer, qui seront illustrés ci-dessous par $\mathcal{G} = 2\mathbb{Z} + 1$ (l'ensemble des entiers impairs).
Le premier sous-cas survient lorsque θ' obtenu de cette manière n'est équivalente à aucune formule de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$, alors qu'elle est satisfiable dans $(\Delta\mathcal{LH}, \models)$. Par exemple, si $\theta = a^{1\bullet} \wedge a^{+3}$, alors $\theta' = a^{1\bullet} \wedge a^{+3} \wedge a^{\bullet 4}$. Si $\mathcal{IJ}$ était un modèle de θ', alors nécessairement $\mathcal{J}(a) = 4 \notin \mathcal{G}$, où $\mathcal{G} = 2\mathbb{Z} + 1$, ce qui est contradictoire avec la notion d'interprétation dans $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Ainsi, aucune interprétation n'est un modèle de θ' dans $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Dans cette situation, θ est elle aussi insatisfiable dans $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$, et sa forme normale est $\bot$.
Le deuxième sous-cas est celui où θ' est équivalente à une formule satisfiable de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ tout en n'étant pas elle-même une formule de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$. Par exemple, soit $\theta = a^{1\bullet} \wedge a^{\bullet 7}$. Alors $\theta' = a^{1\bullet} \wedge a^{+6} \wedge a^{\bullet 7} \notin \Delta\mathcal{LG}$ puisque $6 \notin 2\mathbb{Z} + 1$, pourtant elle est satisfaite par toute interprétation $\mathcal{IJ}$ telle que $\mathcal{I}(a) = 1 \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{J}(a) = 7 \in \mathcal{G}$. Dans cette situation, obtenir un cube normal $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ équivalent à θ consiste simplement à retirer le littéral a^{+6} de θ' pour obtenir le cube normal $a^{1\bullet} \wedge a^{\bullet 7}$.
La définition suivante est cohérente avec ces exemples :

Definition 7 (Cubes normaux lorsque $\mathcal{G} \subsetneq \mathcal{H}$ est infini) *Si $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble infini d'un groupe abélien $(\mathcal{H}, +)$, la définition d'un cube normal θ sur une variable de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ est obtenue en réutilisant avec quelques modifications la définition 1, conditions (i) à (iv) :*

- *Les conditions (i) et (iv) sont reprises telles quelles.*
- *La condition (ii) est modifiée en : θ contient 2 ou 3 littéraux positifs et aucun littéral négatif, tels que définis comme suit. Soit $\theta_{\mathcal{H}}$ un cube normal de $(\Delta\mathcal{LH}, \models)$ sous cette condition (ii) de la définition 1 : $\theta_{\mathcal{H}} = a^{r\bullet} \wedge a^{\bullet s} \wedge a^{+t}$, avec $r, s \in \mathcal{G}$. Il se peut que $t = s - r$ n'appartienne pas à $\mathcal{G}$. Donc, soit $r, s, t \in \mathcal{G}$ et alors $\theta = \theta_{\mathcal{H}}$ ou $r, s \in \mathcal{G}$ et $t \notin \mathcal{G}$, dans ce cas $\theta = a^{r\bullet} \wedge a^{\bullet s}$.*
- *La condition (iii) est modifiée comme suit : soit $\theta_{\mathcal{H}}$ un cube normal de $(\Delta\mathcal{LH}, \models)$ de la forme de cette condition. Un cube normal θ de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ peut être obtenu si le littéral positif $a^{r\bullet}$, a^{+r} ou $a^{\bullet r}$ de $\theta_{\mathcal{H}}$ vérifie $r \in \mathcal{G}$, et si tous les littéraux négatifs faisant mention d'une valeur $s \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{G}$ sont retirés.*

Proposition 8 *Si $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble infini d'un groupe abélien, alors un cube normal de $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ est satisfiable si et seulement si il est différent de $\bot$.*

6.3 $\mathcal{G}$ est un sous-ensemble fini d'un groupe

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble fini tel que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ où $(\mathcal{H}, +)$ est un groupe abélien. Cette situation combine les difficultés des sections 6.1 et 6.2. Elle ne sera pas développée en détails ici.

7 Discussion et conclusion

Cet article a présenté une approche formelle pour représenter des variations entre cas et des règles d'adaptation.
Ce travail théorique peut être prolongé dans différentes directions.
Une première direction serait de confronter cette approche à des applications pratiques et/ou des *benchmarks*, en utilisant un système d'apprentissage de connaissances d'adaptations pour alimenter `CA`.
Ce travail a principalement considéré deux conteneurs de connaissances d'un système de raisonnement à partir de cas : `BC` et `CA` (les connaissances pour la remémoration sont aussi considérées dans [4]). Peu d'attention a été apportée aux connaissances du domaine, représentées par un ensemble de formules statiques `CD`. Pour les connaissances statiques (en particulier les cas), cela consiste principalement en la définition d'une inférence modulo `CD` ($\alpha \models_{\mathtt{CD}} \beta$ si $\mathtt{CD} \cup \{\alpha\} \models \beta$, α est `CD`-satisfiable si $\mathtt{CD} \cup \{\alpha\}$ est satisfiable, etc.). Comment les connaissances statiques représentées par `CD` peuvent-elles utilisées pour définir une inférence sur $(\Delta\mathcal{LG}, \models)$ et des règles d'adaptation est une question qui reste à explorer.
Olaaaf est un moteur d'adaptation fondé sur la révision des croyances dans une logique dont les atomes sont des contraintes linéaires et qui est propositionnellement close [2]. La théorie sur laquelle il est bâti est essentiellement centrée sur les connaissances du domaine `CD` et sur une mesure de dissimilarité `diss` entre interprétations. Certaines règles d'adaptation sont "simulées" dans Olaaaf en ajoutant des connaissances à `CD`, et/ou en modifiant `diss`, bien que cet aspect d'Olaaaf n'ait pas encore été étudié en détail. À l'inverse, l'approche proposée dans cet article est centrée sur `CA` (et sa représentation). Une piste de travail digne d'investigation consiste en la découverte d'une vision intégrée de ces deux approches centrées sur la logique pour l'adaptation.

Références

[1] M. d'Aquin, F. Badra, S. Lafrogne, J. Lieber, A. Napoli, and L. Szathmary. Case Base Mining for Adaptation Knowledge Acquisition. In M. M. Veloso, editor, *Proceedings of the 20th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'07)*, pages 750–755. Morgan Kaufmann, Inc., 2007.

[2] E. Diebold, Y. Kabrit, A. Kril, J. Lieber, P. Malvaud, E. Nauer, and J. Sipp. Olaaaf: A General Adaptation Prototype. In J. A. Recio-Garcia, M. G. Orozco del Castillo, and D. Bridge, editors, *Case-Based Reasoning Research and Development*, volume 14775 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 223–239, Merida, Mexico, July 2024. J. A. Recio-Garcia and M. G. Orozco-del-Castillo and D. Bridge, Springer Nature Switzerland.

[3] N. François and J. Lieber. Appliquer la logique des variations propositionnelles à la représentation de règles d'adaptation pour le raisonnement à partir de cas. In Jean-Guy Mailly, François Schwarzentruber, and Anaëlle Wilczynski, editors, *Journées d'intelligence artificielle fondamentale – Plateforme Intelligence Artificielle*, page 12, La Rochelle, France, July 2024. Jean-Guy Mailly and François Schwarzentruber and Anaëlle Wilczynski.

[4] N. François and J. Lieber. A Knowledge Representation Approach for Reasoning with Adaptation Rules (extended version). Technical report, Loria, 2025. (This report can be found at `https://hal.science/hal-04961604`).

[5] K. Hanney and M. T. Keane. Learning adaptation rules from a case-base. In I. Smith and B. Faltings, editors, *Advances in Case-Based Reasoning – Proc. of the Third Eur. Workshop, EWCBR'96*, LNAI 1168, pages 179–192. Springer Verlag, Berlin, 1996.

[6] V. Jalali, D. Leake, and N. Forouzandehmehr. Learning and applying adaptation rules for categorical features: An ensemble approach. *AI Communications*, 30(3-4):193–205, 2017.

[7] J. M. Luna, Ph. Fournier-Viger, and S. Ventura. Frequent itemset mining: A 25 years review. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Data Mining and Knowledge Discovery*, 9(6):e1329, 2019.

[8] E. Nauer, J. Lieber, and M. d'Aquin. Lazy Adaptation Knowledge Learning Based on Frequent Closed Itemsets. In *Case-Based Reasoning Research and Development*, volume 14141 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 309–324, Aberdeen, United Kingdom, July 2023. Springer Nature Switzerland.

[9] C. K. Riesbeck and R. C. Schank. *Inside Case-Based Reasoning*. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Hillsdale, New Jersey, 1989. Available on line.

[10] R. M. Smullyan. *First-order logic*. Courier Corporation, 1995.