Sémantique catégorielle de logique de descriptions et raisonnement

Ludovic Brieulle[1], Chan Le Duc[1]

[1] Université Sorbonne Paris Nord, LIMICS, U1142, F-93000, Bobigny, France

{ludovic.brieulle}, {chan.leduc}@univ-paris13.fr

Résumé

Nous présentons une nouvelle logique de description (DL) permettant la négation ainsi qu'une procédure de raisonnement pour celle-ci. La construction de cette nouvelle logique est basée sur la réécriture de la sémantique usuelle ensembliste de la DL $\mathcal{ALC}$ en langage catégoriel où les concepts et subsomptions sont respectivement représentés par des objets et des flèches d'une catégorie. Cette réécriture nous donne une plus grande modularité sur la nouvelle sémantique des différents constructeurs comparée à la sémantique ensembliste. La modularité nous permet de définir une nouvelle DL NP*-complète avec la négation en éliminant les interactions entre les constructeurs logiques responsables de la complexité* EXPTIME *de la DL $\mathcal{ALC}$.*

Mots-clés

Logique de Description, Théorie des Catégories, Ontologies.

Abstract

We present a new description logic (DL) allowing for negation and a reasoning procedure for it. This construction is based on a rewriting of the usual set semantics of the DL $\mathcal{ALC}$ using category theory where concepts and subsumptions are respectively represented as objects and arrows of a category. This rewriting offers a categorical representation of the semantics that is more modular than the usual one based on set theory. This modularity allows us to define an NP*-complete logic without the interaction between logical constructors reponsible for* EXPTIME *complexity.*

Keywords

Description Logics, Category Theory, Reasoning.

1 Introduction

Les langages basés sur les logiques de description (DL) [1] tel que OWL [14] ou OWL 2 [8] sont largement utilisés pour représenter les ontologies sur les applications orientées sur la sémantique. La logique de description $\mathcal{ALC}$ est la plus petite logique fermée par la négation et contenant tous les constructeurs booléens. Nous pouvons alors appliquer les loi de De Morgan et utiliser l'écriture en forme normale négative (NNF) afin d'exprimer des formulations négatives comme celle mentionnées par Ceusters et al. [5], présentes dans certains termes définis dans SNOMED-CT ou dans l'ontologie OBO comme les formules lacks_of ou loss_of_consciousness.

Cependant, il est bien connu que $\mathcal{ALC}$ est EXPTIME-complet avec des TBox générales [15, 2], son utilisation dans un cadre médical ou réaliste est donc exclue puisque le raisonneur pourrait prendre plusieurs minutes pour donner une réponse, voire le raisonnement pourrait ne pas aboutir du tout (*e.g.* erreur de mémoire).

La principale motivation de cet article est alors d'introduire une nouvelle logique dérivée de $\mathcal{ALC}$, qui conserve la négation et possède une complexité inférieure à EXPTIME. Nous conjecturons que l'interaction entre la restriction universelle et existentielle est responsable de cette complexité, nous allons utiliser la modularité de la sémantique catégorielle de la restriction universelle pour obtenir une nouvelle logique NP-complet. Puisque nous souhaitons pouvoir toujours exprimer des formules du type « *un patient ne devrait pas être traité à la pénicilline* », qui peuvent s'exprimer de la façon suivante en NNF $\neg\exists\mathsf{medicatedWith}.\mathsf{Penicillin} \equiv \forall\mathsf{medicatedWith}.\neg\mathsf{Penicillin}$ il nous faudra faire attention à conserver la partie de la sémantique de la restriction universelle qui nous permet d'exprimer ce type de concept.

Dans ce but, nous définissons alors une nouvelle logique $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ en utilisant une réécriture de la sémantique ensembliste usuelle grâce aux outils de la théorie des catégories, que nous appelons sémantique catégorielle. À cause de l'absence de l'appartenance dans cette théorie, nous avons besoin de plus de contraintes pour définir la sémantique des différents constructeurs en sémantique catégorielle. Ceci nous offre en contrepartie plus de possibilités pour définir différentes logiques. Par exemple, la subsomption $\exists R.C \sqcap \forall R.D \sqsubseteq \exists R.(C \sqcap D)$ (†) est conséquence directe de la sémantique des constructeurs $\exists$ et $\forall$ dans le cadre classique, *c'est-à-dire* que (†) découle de la définition de $(\exists R.C)^{\mathcal{I}}$ et $(\forall R.D)^{\mathcal{I}}$ pour toutes interprétations $\mathcal{I}$. Ainsi, une logique qui n'inclurait pas la relation (†) dans le cadre classique ne *peut pas* être définie. Il se trouve que dans la sémantique catégorielle, nous verrons que cette interaction est une partie indépendante de la sémantique des constructeurs $\exists$ et $\forall$ dans notre nouvelle sémantique catégorielle. Cela nous permet alors de définir notre nouvelle logique $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ où cette interaction n'existe pas entièrement à cause d'une restriction universelle *affaiblie*, tout en conservant le reste des constructeurs qui interviennent dans $\mathcal{ALC}$. Cette nouvelle sémantique ne permettra alors de préserver qu'une partie de l'interaction entre $\exists$ et $\forall$, précisément : « *Si*

$C \sqcap D$ est insatisfiable, alors $\exists R.C \sqcap \forall R.D$ est insatisfiable également » (††) qui est *déjà* vraie dans le cadre classique grâce notamment à la relation (†). Cela entraîne forcément une perte d'expressivité qui peut être négligeable dans certains cas comme nous allons le voir ; nous préciserons plus tard l'expressivité perdue.

Exemple 1 *Considérons un patient* $\#\mathsf{X}$ *qui souffre d'une infection et à qui de la pénicilline a été prescrite. Cependant, il est également précisé quelque part dans la base de connaissance que celui-ci est allergique à la pénicilline et à l'aspirine. La situation peut être résumée par la TBox* $\mathcal{T}_1$ *contenant uniquement l'axiome suivant :*

$$\begin{aligned}\mathsf{treatmentofX} \sqsubseteq\ & \exists \mathsf{medicatedWith}.\mathsf{Penicillin} \sqcap \\ & \forall \mathsf{medicatedWith}.\neg\mathsf{Penicillin} \sqcap \\ & \forall \mathsf{medicatedWith}.\neg\mathsf{Aspirin}\end{aligned}$$

Sous la sémantique catégorielle de $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$*, la relation (††) permet de déduire directement de la conjonction* $\mathsf{Penicillin} \sqcap \neg\mathsf{Penicillin}$ *que la conjonction* $\exists \mathsf{medicatedWith}.\mathsf{Penicillin} \sqcap \forall \mathsf{medicatedWith}.\neg\mathsf{Penicillin} \sqcap \forall \mathsf{medicatedWith}.\neg\mathsf{Aspirin}$ *est insatisfiable et par conséquent le concept* $\mathsf{treatmentofX}$ *l'est également par rapport à* $\mathcal{T}_1$*. Alors qu'en sémantique ensembliste, (†) aurait généré* $\mathsf{Penicillin} \sqcap \neg\mathsf{Penicillin} \sqcap \neg\mathsf{Aspirin}$ *pour trouver le même résultat.*

Dans cet exemple, nous avons montré que grâce à (††) nous pouvons découvrir un conflit*, ou* clash *en anglais, sans avoir besoin de regrouper toutes les conjonctions. Il est à noter que que (†) peut amener à créer des conjonctions de* $n \geqslant 2$ *conjoints alors que (††) ne fonctionne qu'avec des paires de conjoints. Ce cas de figure est notamment présent dans des ontologies médicales telles que OBO ou SNOMED.*

Il est à noter que l'absence d'individu de la logique n'est dû qu'à un soucis de simplification au départ dans le traitement de la nouvelle sémantique. Nous pensons pouvoir introduire à terme la notion d'individu dans la sémantique catégorielle en utilisant des objets « singleton » $\{a\}$ tel qu'aucun objets n'aient de flèche vers celui-ci, à l'exception de $\bot$.

Il n'y a à notre connaissance que peu de travaux sur l'utilisation de la théorie des catégories dans le cadre des logiques de description, nous en présentons brièvement certains d'entre eux. Spivak et Kent [16] utilisent la théorie des catégories pour définir un langage graphique de haut niveau comparable à OWL. Codescu, Mossakowski et Kutz [6] ont introduit un système permettant de formaliser un réseau d'ontologies alignées. Il y est montré que sur un tel réseau, le raisonnement pouvait se réduire à un raisonnement local sur une logique de description donnée appartenant à celui-ci. De ce fait, la sémantique déployée sur ces DL utilisent toujours la théorie des ensembles. Pour finir, Moss [13], Kupke et Pattinson [10] ont utilisé des F-coalgèbre pour obtenir une logique co-algébrique, où F est un foncteur sur la catégorie des ensembles. Ce foncteur est utilisé pour décrire les structures des modèles de Kripke. Ce dernier travail diffère du nôtre dans le sens où nous utilisons la théorie des catégories pour directement « encoder » la sémantique ensembliste des DL, et non pas pour décrire les modèles des DL.

Cet article est organisé de la façon suivante : nous commençons par présenter $\mathcal{ALC}$ muni de la sémantique ensembliste, ainsi que les outils de la théorie des catégories pour la logique en section 2. Puis nous établirons en détail dans la section 3 notre nouvelle sémantique catégorielle de $\mathcal{ALC}$ en utilisant les différents outils que la théorie des catégories nous fournit. En section 4, nous présentons notre nouvelle logique $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ qui vient de l'affaiblissement du constructeur de la restriction universelle et donc de son interaction avec la restriction existentielle dans le contexte de la sémantique catégorielle, ainsi qu'un algorithme permettant de façon non-déterministe et polynomiale de répondre à la question de la satisfiabilité d'un concept par rapport avec une TBox en $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$. Pour finir, dans la section 5, nous ferons le bilan des résultats et parlerons des prochaines pistes de recherche que nous souhaitons explorer.

Toutes les preuves et détails concernant les résultats énoncés dans cet article sont disponibles en ligne dans lien fourni en référence [9].

2 Préliminaires

2.1 Sémantique ensembliste de la logique de description $\mathcal{ALC}$

Soit $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ deux ensembles non vides disjoints de concepts atomiques et de rôles atomiques respectivement.

L'ensemble des concepts $\mathcal{ALC}$ est défini de manière inductive à partir de $\mathbf{C}$ et $\mathbf{R}$ de la façon suivante : tous les concepts atomiques sont des concepts $\mathcal{ALC}$, $\bot$ et $\top$ sont des concepts $\mathcal{ALC}$, si C et D sont des concepts $\mathcal{ALC}$ et R est un rôle atomique, alors $C \sqcap D, C \sqcup D, \neg C, \exists R.C, \forall R.D$ sont des concepts $\mathcal{ALC}$.

Soit C et D deux concepts $\mathcal{ALC}$ quelconques, alors $C \sqsubseteq D$ est appelée une *inclusion de concepts générale* (GCI). Un ensemble fini de GCI $\mathcal{O}$ est appelé une TBox. Une interprétation $\mathcal{I}$ est la donnée d'un ensemble non-vide $\Delta^{\mathcal{I}}$ appelé *domaine* et d'une application $\cdot^{\mathcal{I}}$ qui à chaque concept atomique $A \in \mathbf{C}$ associe un sous-ensemble $A^{\mathcal{I}}$ de $\Delta^{\mathcal{I}}$ et à chaque rôle atomique $R \in \mathbf{R}$ un sous-ensemble $R^{\mathcal{I}}$ de $\Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$; de sorte que : $\top^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}}, \bot^{\mathcal{I}} = \varnothing, (C \sqcap D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}}, (C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}, (\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}, (\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists y : (x,y) \in R^{\mathcal{I}} \wedge y \in C^{\mathcal{I}}\}$ et $(\forall R.C)^{\mathcal{I}} = \{x \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall y : (x,y) \in R^{\mathcal{I}} \implies y \in C^{\mathcal{I}}\}$.

Une interprétation $\mathcal{I}$ satisfait une CGI $C \sqsubseteq D$ si $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$. Si $\mathcal{I}$ satisfait toutes les GCIs de $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{I}$ est un modèle de $\mathcal{O}$, noté $\mathcal{I} \models \mathcal{O}$. S'il existe un modèle de $\mathcal{O}$, alors $\mathcal{O}$ est dit consistent. Un concept C est *satisfiable* (en sémantique ensembliste) par rapport à une Tbox $\mathcal{O}$, s'il existe $\mathcal{I} \models \mathcal{O}$ tel que $C^{\mathcal{I}} \neq \varnothing$.

2.2 Théorie des catégories pour la logique

L'objet principal utilisé dans cet article est une catégorie. Celle-ci possède une définition moins restrictive que celle pour un ensemble, elle est suffisamment abstraite pour donner une liberté sur les objets et les flèches qui entrent en jeux. Les propriétés que nous allons définir pour établir la nouvelle sémantique que nous utiliserons héritera de cette « liberté » ou modularité est ce qui nous permettra d'obtenir le nouveau langage présenté dans ce texte.

Une *catégorie* $\mathscr{C}$ est la donnée d'une collection de $\mathscr{C}$-objets, notée $\mathsf{Ob}(\mathscr{C})$, d'une collection $\mathscr{C}$-flèches, notée $\mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ – de deux applications dom et cod de $\mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ vers $\mathsf{Ob}(\mathscr{C})$ qui à une flèche f associent deux objets tels que si on écrit $A := \mathsf{dom}\, f$ et $B := \mathsf{cod}\, f$ alors on écrit $f : A \longrightarrow B$. Pour tout objet $A \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C})$, il existe une flèche identité 1_A. De plus, à toute paire de flèches $\langle g, f\rangle$ telle que $\mathsf{cod}\, f = \mathsf{dom}\, g$, nous associons la composition de flèche $g \circ f : \mathsf{dom}\, f \longrightarrow \mathsf{cod}\, g$. L'opération de composition est associative, *i.e.* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$ et pour $f : A \longrightarrow B$, $1_b \circ f = f \circ 1_A = f$.

Un *foncteur* F d'une catégorie $\mathscr{C}$ vers une autre catégorie $\mathscr{D}$ est une application qui à tout objet X de $\mathscr{C}$ associe un objet $F(X)$ de $\mathscr{D}$ et à toute flèche $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathscr{C}$ associe une flèche $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies : $F(1_X) = 1_{F(X)}$ et $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$.

Soit A et B des objets de $\mathscr{C}$, le *produit* de A et B est un objet $A \times B$ et deux flèches $\pi_1 : A \times B \longrightarrow A$, $\pi_2 : A \times B \longrightarrow B$ tels que pour chaque paires de flèches $f_A : X \longrightarrow A, f_B : X \longrightarrow B$, il existe une unique flèche $f_{A\times B} : X \longrightarrow A \times B$ telle que $f_A = \pi_1 \circ f_{A\times B}$ et $f_B = \pi_2 \times f_{A\times B}$.

Le *co-produit* de A et B est l'objet $A + B$ et deux flèches $\iota_1 : A \longrightarrow A + B, \iota_2 : B \longrightarrow A + B$ tels pour $g_A : A \longrightarrow X, g_B : B \longrightarrow X$ il existe une unique flèche $f_{A+B} : A+B \longrightarrow X$ telle que $g_A = f_{A+B} \circ \iota_1$ et $g_B = f_{A+B} \circ \iota_2$.

Soit $F : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ et $G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ deux foncteurs tels que pour tout objets c de $\mathscr{C}$ et d de $\mathscr{D}$, il y a une bijection ensembliste $\mathsf{Hom}_{\mathscr{C}}(F(D), C) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathscr{D}}(D, G(C))$. Nous disons alors que F est l'adjoint à gauche de G et G l'adjoint à droite de F.

3 Sémantique catégorielle de $\mathcal{ALC}$

Une approche classique pour donner une sémantique ensembliste à la logique propositionnelle est d'utiliser l'algèbre booléenne $\langle \mathcal{P}(D), \subseteq\rangle$, où $\mathcal{P}(D)$ est l'ensemble des parties de D et où $\mathbf{1} := D$ et $\mathbf{0} := \varnothing$. L'algèbre est munie d'une fonction de vérité V qui à chaque phrase atomique associe alors une valeur de vérité dans $\mathcal{P}(D)$. Elle est étendue aux phrases complexes qui utilisent $\wedge, \vee$ et $\neg$ grâce à l'intersection $\cap$, l'union $\cup$ et le complément $\sim$ sur $\mathcal{P}(D)$ en tenant compte de l'appartenance $\in$.

Une extension de cette algèbre booléenne est un treillis appelé l'algèbre de Heyting $\langle H, \subseteq\rangle$. Dans ce contexte, la fonction de vérité V associe à $x \wedge y$ et $x \vee y$ une *plus grande limite inférieure* et une *plus petite limité supérieure* respectivement.

Dans notre cas, Le Duc [11] et Brieulle [4], nous avons remplacé le treillis de l'algèbre par une catégorie de sorte que les concepts/rôles soient des objets et la relation d'ordre $\subseteq$ est remplacée par les flèches de cette catégorie.

Notre but est d'introduire une nouvelle sémantique pour la logique de description $\mathcal{ALC}$ en utilisant les notions de la théorie des catégories que nous venons de présenter.

À cette fin, nous aurons besoin de deux catégories, $\mathscr{C}_c$ une catégorie pour représenter les concepts et leurs interactions par rapport aux différents constructeurs et $\mathscr{C}_r$ une catégorie pour représenter les rôles et comment ils influencent les interactions entre les différents concepts. Nous aurons également besoin de deux foncteurs $\Pi_\ell, \Pi_r : \mathscr{C}_r \longrightarrow \mathscr{C}_c$ qui joueront le rôle des projecteurs π_ℓ et π_r pour une relation quelconque. Par exemple, considérons la relation $R = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ alors les projections nous donnent $\pi_\ell(R) = \{x_1, x_2\}$ et $\pi_r(R) = \{y_1, y_2\}$.

Nous commençons d'abord par définir ce que nous appelons des catégories de *syntaxe* qui serviront de base sur lesquelles nous ajouterons alors les structures nécessaires à exprimer la sémantique des différents constructeurs qui entrent en jeu.

Définition 1 *Soit* $\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{R}$ *deux ensembles non vides disjoints de concepts atomiques et de rôles atomiques respectivement. Les catégories syntaxiques de concepts* $\mathscr{C}_c$ *et de rôles* $\mathscr{C}_r$ *sont définies à partir de la signature* $\langle \mathbf{C}, \mathbf{R}\rangle$ *de la façon suivante :*

1. *Les objets de* $\mathscr{C}_c$ *sont les concepts atomiques* $C \in \mathbf{C}$*, l'objet terminal* $\top$ *et l'objet initial* $\bot$*. Les flèches de* $\mathscr{C}_c$ *sont les flèches identités* 1_C *pour tout objet* C *ainsi que les flèches initiales* $\bot \longrightarrow C$ *et terminales* $C \longrightarrow \top$ *pour tout objet* C *de* $\mathscr{C}_c$*.*
2. *Les objets de* $\mathscr{C}_r$ *sont les rôles atomiques* $R \in \mathbf{R}$*, les objets* $\mathfrak{R}_{\exists R.C}$ *pour tout objet* C *de* $\mathscr{C}_c$ *et* $R \in \mathbf{R}$ *ainsi que l'objet terminal* $R_\top$ *et initial* $R_\bot$*. Les flèches de* $\mathscr{C}_r$ *sont les flèches identités* 1_R*,* $R \longrightarrow \mathfrak{R}_\top, \mathfrak{R}_\bot \longrightarrow R$ *pour tout objet* R *de* $\mathscr{C}_r$ *ainsi que* $\mathfrak{R}_{\exists R.C} \longrightarrow R$ *pour tout objet* C *de* $\mathscr{C}_c$ *et* $R \in \mathbf{R}$*.*
3. *Nous définissons deux foncteurs* $\Pi_\ell, \Pi_r : \mathscr{C}_r \longrightarrow \mathscr{C}_c$ *qui envoient chaque objet de* $\mathscr{C}_r$ *vers un objet de* $\mathscr{C}_c$ *et chaque flèche de* $\mathscr{C}_r$ *vers une flèche de* $\mathscr{C}_c$*, en particulier pour tout objet* R *de* $\mathscr{C}_r$ *il existe des objets* $\Pi_\ell(R), \Pi_r(R)$ *dans* $\mathscr{C}_c$*.*
   De plus, si $R \longrightarrow \mathfrak{R}_\bot$ *est dans* $\mathscr{C}_r$ *alors* $\Pi_{\ell,r}(R) \longrightarrow \bot$ *est dans* $\mathscr{C}_c$ *pour* R *un objet de* $\mathscr{C}_r$*.*

Il est à noter que $\mathsf{Ob}(\mathscr{C})$ et $\mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ ne sont pas forcément des ensembles en général, mais ce sera le cas pour nos catégories.

Il nous faut instancier $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_r$ pour obtenir des catégories qui illustrent les contraintes imposées par la sémantique des différents constructeurs logiques et les axiomes de $\mathcal{O}$. Nous commençons par réécrire la sémantique de chaque constructeur dans la théorie des catégories.

Axiomes.

(F1) $C \sqsubseteq D \in \mathcal{O}$ alors $C \longrightarrow D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

Conjonction. Le produit catégoriel (voir section 2) est utilisé en remplaçant $\times$ par $\sqcap$ pour illustrer la conjonction de deux concepts $C \sqcap D$, avec pour conséquences :

(F2) $C \sqcap D \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c) \implies C \sqcap D \longrightarrow C, C \sqcap D \longrightarrow D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

(F3) $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), X \longrightarrow C, X \longrightarrow D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \implies X \longrightarrow C \sqcap D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Le premier point découle des projections du produit et le deuxième de sa propriété universelle. Autrement dit, $C \sqcap D$ est le plus grand objet contenu à la fois dans C et D. De plus, si chaque flèche $(\rightarrow)$ est remplacée par la subsomption $(\sqsubseteq)$ alors les propriétés usuelles de la sémantique de $\sqcap$ par une interprétation $\mathcal{I}$ sont toujours respectées, voir lemme B1 [9].

Disjonction. Pour la conjonction, nous utilisons le co-produit catégoriel, où $\sqcup$ remplace $+$, $C \sqcup D$ (voir section 2) qui s'illustre par les deux points suivants, conséquences des propriétés du dit co-produit :

(F4) $C \sqcup D \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c) \implies C \longrightarrow C \sqcup D, D \longrightarrow C \sqcup D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

(F5) $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), C \longrightarrow X, D \longrightarrow X \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \implies C \sqcup D \longrightarrow X \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Nous pouvons alors voir $C \sqcup D$ comme le plus petit objet contenant à la fois C et D.

De même que pour la conjonction, si nous remplaçons les flèches $(\rightarrow)$ par des subsomptions $(\sqsubseteq)$ alors les propriétés usuelles de la sémantique de la disjonction $\sqcup$ par une interprétation $\mathcal{I}$ sont respectées, voir lemme B2 [9].

Négation. Nous devons utiliser la conjonction et la disjonction, donc le produit et le co-produit, pour pouvoir définir la négation. Pour tout $C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$, nous définissons alors $\neg C$ comme l'objet tel que :

(F6) $C \sqcap \neg C \longrightarrow \bot, C \sqcup \neg C \longrightarrow \top \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

(F7) $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), C \sqcap X \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \implies X \longrightarrow \neg C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

(F8) $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), \top \longrightarrow C \sqcup X \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \implies \neg C \longrightarrow X \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Il est possible de voir $\neg C$ comme le plus grand objet disjoint de C. Comme pour les constructeurs précédents, les propriétés de la sémantique de la négation $\neg$ par une interprétation $\mathcal{I}$ sont toujours conservées en remplaçant les flèches $(\rightarrow)$ par des subsomptions $(\sqsubseteq)$, lemme B3 [9].

Restriction existentielle.

Pour la restriction existentielle, nous avons besoin des objets de rôles $\mathfrak{R}_{\exists R.C}$ et des foncteurs Π_ℓ, Π_r définis dans la définition 1. La sémantique de $\exists$ est alors caractérisée par les deux points suivants :

(F9) Si $\exists R.C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$ alors $\mathfrak{R}_{\exists R.C} \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_r)$, $\mathfrak{R}_{\exists R.C} \longrightarrow R \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_r)$ et $\Pi_\ell(\mathfrak{R}_{\exists R.C}) \Longleftrightarrow \exists R.C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c), \Pi_r(\mathfrak{R}_{\exists R.C}) \longrightarrow C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

(F10) Si $R' \longrightarrow R \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_r), \Pi_r(R') \longrightarrow C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ alors $\Pi_\ell(R') \longrightarrow \exists R.C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Il est à noter que MacLane et al. [12] ont défini pour les restriction existentielle non-qualifiée $\exists R$ comme l'adjoint à gauche (voir section 2) d'un foncteur inverse $\Pi^\star$. Cependant nous avons dû utiliser des propriétés différentes pour l'adapter à nos catégories et à la restriction existentielle qualifiée.

Restriction universelle. Puisque nous avons déjà défini la sémantique catégorielle de $\neg$ et $\exists$, il est alors possible définir $\forall R.C$ comme $\neg\exists R.\neg C$.

(F11) Si $\forall R.C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$ alors $\forall R.C \Longleftrightarrow \neg\exists R \neg C \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Comme pour les précédents constructeurs, remplacer $(\rightarrow)$ par $(\sqsubseteq)$ redonne les propriétés usuelles de tous les constructeurs présentés, voir lemme B4 et B5 [9].

Si nous prenons en compte uniquement les points F1 à F11 alors il nous manque les interactions entre les différents constructeurs pour couvrir la totalité de la sémantique ensembliste de $\mathcal{ALC}$. Plus précisément, la distributivité entre $\sqcap$ et $\sqcup$ et le regroupement entre $\exists$ et $\forall$. Pour compléter la sémantique, nous commençons par ajouter la propriété suivante :

(F12) *(Distributivité)* Si $C \sqcap (D \sqcup E) \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$ alors $C \sqcap (D \sqcup E) \longrightarrow (C \sqcap D) \sqcup (C \sqcap E) \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

Si nous remplaçons $(\rightarrow)$ par $(\sqsubseteq)$, il est facile de voir que nous gardons les propriétés usuelles de la ditributivités de part les propriétés de $\cap$ et $\cup$, voir Lemme B6 [9].

Enfin, la dernière propriété qu'il nous reste à ajouter concerne l'interaction entre $\exists$ et $\forall$, interaction qui est déduite de la propriété suivante en combinaison avec les précédentes :

(F13) Si $R' \longrightarrow R \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_r)$ et $\Pi_\ell(R') \longrightarrow \forall R.D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ alors $\Pi_r(R') \longrightarrow D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

Maintenant que nous avons toutes les propriétés nécessaires pour donner la sémantique aux objets de $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_r$, il va nous être possible d'effectuer des raisonnements à partir de ces propriétés. Nous souhaitons pouvoir déterminer la satisfiabilité d'un concept par rapport avec une TBox spécifique $\mathcal{O}$. Jusqu'à présent, nous n'avons à notre disposition que des catégories de syntaxe avec très peu de structure, ne prenant pas en compte les axiomes d'une TBox ou les différents constructeurs de $\mathcal{ALC}$. Cela dit, nous venons d'introduire les propriétés nécessaires permettant d'exprimer la sémantique des différents constructeurs mais également qui prennent en compte les axiomes d'une TBox $\mathcal{O}$. Nous allons formaliser la définition de catégories d'ontologies qui prennent en compte ces propriétés.

Définition 2 (Catégorie d'ontologie) *Soit $\mathcal{O}$ une TBox en $\mathcal{ALC}$ avec $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ des ensembles non-vides disjoints de concepts atomiques et de rôles atomiques respectivement, ainsi que C_0 un concept en $\mathcal{ALC}$. Les* catégories d'ontologie de C_0 *par rapport à $\mathcal{O}$ sont les catégories de syntaxe $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ et $\mathscr{C}_r\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ de signature $\langle \mathbf{C}, \mathbf{R}\rangle$ telles que les propriétés F1 à F13 soient satisfaites et telles que* $C_0 \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle)$.

Jusqu'à mention du contraire, nous fixons C_0 et $\mathcal{O}$ comme un concept en $\mathcal{ALC}$ et une TBox en $\mathcal{ALC}$ respectivement. Les flèches du lemme suivants nous donnent les propriétés complètes pour la restriction existentielle, universelle leurs intéractions ainsi que celles avec la négation, la conjonction et la disjonction.

Lemme 1 (Propriétés existentielles et universelles) *Nous supposons que tous les objets qui interviennent dans les résultats sont bien la catégorie $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$. Alors si $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ satisfait F1 à F13, les propriétés suivantes sont vraies.*

$$C \longrightarrow \bot \implies \exists R.C \longrightarrow \bot \tag{1}$$

$$C \longrightarrow D \implies \exists R.C \longrightarrow \exists R.C \tag{2}$$

$$C \longrightarrow D \implies \forall R.C \longrightarrow \forall R.D \tag{3}$$

$$\exists R.C \sqcap \forall R.D \longrightarrow \exists R.(C \sqcap D) \tag{4}$$

$$(\text{F10}) \text{ et } (\text{F11}) \iff (C \sqcap D \longrightarrow \bot \implies \exists R.C \sqcap \forall R.D \longrightarrow \bot) \tag{5}$$

$$(\text{F10}) \text{ et } (\text{F11}) \iff (\top \longrightarrow C \sqcup D \implies \top \longrightarrow \exists R.C \sqcup \forall R.D) \tag{6}$$

Pour les points (5) et (6), il est important de préciser que les équivalences sont obtenues sans l'intervention de F13 ; cela nous servira plus tard. Il est également à préciser que les constructeurs $\sqcap$ et $\sqcup$ sont tous les deux commutatifs, associatifs et idempotents, ces propriétés sont conséquences des définitions du produit et du co-produit utilisé dans les points F2 à F5.
Notons aussi que les propriétés de la négation combinées avec celles de la disjonction, la conjonction, les restrictions universelles et existentielles permettent d'obtenir les lois de De Morgan et, à terme, d'écrire tous les concepts en *forme normale négative* (NNF).

Lemme 2 (Propriétés de la négation catégorielle) *Sous l'hypothèse que tous les objets sont présents dans la catégorie d'ontologie $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$, alors les flèches suivantes sont présentes dans celle-ci.*

$$C \rightleftarrows \neg\neg C \tag{7}$$

$$C \longrightarrow \neg D \iff D \longrightarrow \neg C \tag{8}$$

$$C \sqcap D \longrightarrow \bot \iff C \longrightarrow \neg D \text{ (or } D \longrightarrow \neg C) \tag{9}$$

$$\top \longrightarrow \neg C \sqcup D \iff C \longrightarrow D \tag{10}$$

$$\neg(C \sqcap D) \rightleftarrows \neg C \sqcup \neg D \tag{11}$$

$$\neg(C \sqcup D) \rightleftarrows \neg C \sqcap \neg D \tag{12}$$

$$\neg(\forall R.C) \rightleftarrows \exists R.\neg C \tag{13}$$

$$\neg(\exists R.C) \rightleftarrows \forall R.\neg C \tag{14}$$

Une notion importante qui est à la base de ce que nous souhaitons obtenir est la notion d'*indépendance* d'une propriété par rapport à toutes les autres. Nous disons qu'une propriété/flèche est indépendante si elle n'est pas conséquence des autres propriétés, elles sont nécessaires pour obtenir la totalité de la sémantique des constructeurs. C'est notamment le cas pour F12 par rapport aux propriétés F2 à F4. Ceci explique pourquoi nous avons expliciter la distributivité de $\sqcap$ et $\sqcup$ alors qu'elle est la conséquence des définitions de $\cap$ et $\cup$ en sémantique ensembliste.
Cependant, la propriété indépendante qui nous intéresse est F13. Pour illustrer sont indépendance, nous allons construire une catégorie qui satisfait toutes les propriétés de F1 à F12. Nous verrons alors que la flèche du point 4 du lemme 1 ne peut être obtenue si l'intervention de la flèche F13 n'est pas autorisée.

Exemple 2 *Soit* $\mathsf{C}_0 = (\exists\mathsf{R.D} \sqcap \forall\mathsf{R.C}) \sqcup \exists\mathsf{R.(D} \sqcap \mathsf{C)}$. *Soit $\mathscr{C}_c$ et $\mathscr{C}_r$ les catégories de concepts et de rôles de $\langle \mathsf{C}_0, \varnothing\rangle$ respectivement. Pour faciliter les notations, nous posons* $\mathsf{X} = \exists\mathsf{R.D} \sqcap \forall\mathsf{R.C}$, $\mathsf{Y} = \neg\exists\mathsf{R.}\neg\mathsf{C} \sqcap \exists\mathsf{R.}\neg\mathsf{C}$ *et* $\mathsf{Z} = \neg\exists\mathsf{R.}\neg\mathsf{C} \sqcup \exists\mathsf{R.}\neg\mathsf{C}$. *Par soucis de clarté, nous ignorerons dans la suite les flèches identités, terminales et initiales ainsi que les compositions inutiles dans la recherche d'une flèche entre $\exists R.C \sqcap \forall R.D$ et $\exists R.(C \sqcap D)$. D'après la propriété F9, la catégorie $\mathscr{C}_r$ admet les flèches*
$\mathsf{R}_{(\exists\mathsf{R.D})} \longrightarrow \mathsf{R}$, $\mathsf{R}_{(\exists\mathsf{R.}\neg\mathsf{C})} \longrightarrow \mathsf{R}$, $\mathsf{R}_{(\exists\mathsf{R.(D}\sqcap\mathsf{C))}} \longrightarrow \mathsf{R}$.
En considérant uniquement que les propriétés F1 à F9, ainsi que la propriété F11 et les flèches qui découlent de celles-ci, nous ne pouvons pas prouver l'appartenance de $\mathsf{X} \longrightarrow \exists\mathsf{R.(D} \sqcap \mathsf{C)}$ *à* $\mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$. *Incluons à partir de maintenant la propriété F10). Pour qu'elle puisse être utiliser, nous devons commencer par ajouter arbitrairement à* $\mathsf{Ob}(\mathscr{C}_r)$ *un objet* R' *avec* $\Pi_\ell(\mathsf{R}') \longrightarrow \mathsf{X}$. *Pour que nous puissions obtenir* $\mathsf{X} \longrightarrow \exists\mathsf{R.(D} \sqcap \mathsf{C)} \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *de F10, il nous faut également la flèche $\Pi_r(R') \longrightarrow X$ l'existence n'a pas pu être prouvée avec les propriétés F1-F11. Cependant, l'existence de la flèche* $\mathsf{X} \longrightarrow \exists\mathsf{R.(D} \sqcap \mathsf{C)}$ *découle de la propriété F13. Ainsi, F13 est bien indépendante des propriétés F1-F11.*

Tout comme en sémantique ensembliste, nous pouvons définir une forme normale négative (NNF) d'un concept C, que nous écrivons $\mathsf{NNF}(C)$, comme une forme où la négation n'apparaît que devant des concepts atomiques. Il est possible de convertir chaque objet vers sa forme NNF en utilisant les lois de De Morgan, présentes dans le lemme 2, et la propriété F11. Ainsi, par la suite, nous pouvons supposer que si le symbole $\neg$ est devant un concept C, alors C est un concept atomique. Sous cette hypothèse, nous pouvons réduire le nombre de propriétés nécessaires pour caractériser la sémantiques catégorielles en terme de satisfiabilité. Nous rappelons que dans une catégorie d'ontologie la présence de la flèche $C \longrightarrow D$ dans la catégorie est équivalent à la présence de $\top \longrightarrow \neg C \sqcup D$ comme le montre la propriété (10) dans le lemme 2.

Définition 3 *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}$ et $\mathcal{O}$ une TBox en $\mathcal{ALC}$. Soit $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ une catégorie de concept d'ontologie telle que tous ses objets soient écrits en* NNF *et que les lois de conjonctions et disjonctions (commutatives, associatives et idempotentes) soient toujours valides dans celle-ci. La catégorie $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ est dite* NNF-saturée *si les propriétés suivantes sont vérifiées.*

3.1 $C \sqsubseteq D \in \mathcal{O}$ *implique* $\top \longrightarrow \neg C \sqcup D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle)$.

3.2 $C \sqcap D \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$ *implique* $C \sqcap D \longrightarrow C, C \sqcap D \longrightarrow D \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

3.3 $X \longrightarrow C, X \longrightarrow D \sqcup E \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *impliquent* $C \sqcap D, C \sqcap E \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$.

3.4 $X \longrightarrow C, X \longrightarrow D \sqcup E, C \sqcap D \longrightarrow \bot, C \sqcap E \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *impliquent* $X \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

3.5 $X \longrightarrow A, X \longrightarrow \neg A \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *impliquent* $X \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

3.6 $\exists R.C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$ *implique* $C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$.

3.7 $\exists R.C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$, $C \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *impliquent* $\exists R.C \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

3.8 $X \longrightarrow \exists R.C, X \longrightarrow \forall R.C' \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *impliquent* $X \longrightarrow \exists R.(C \sqcap C') \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$.

Comme les propriétés énoncées sont uniquement nécessaire pour découvrir des flèches avec pour codomaine $\bot$, cela les rend *de facto* plus faibles que les propriétés F1 à F13 qui servent à décrire l'entièreté de la sémantique engendrée par l'ontologie. Par exemple, la propriété 3.2 est une partie de la définition de la conjonction, plus précisément F2. La propriété 3.3 ne rajoute que le conjoint du codomaine de la flèche F12, 3.4 est conséquence de F12, F6 et la loi de composition. Le point 3.5 est également une conséquence de F3, F6 et qu'il s'agit d'une catégorie. L'implication 3.5 est encore une fois le résultant des propriétés F3 et F6, 3.6 quant à elle est déduite de la flèche $\Pi_r(\mathfrak{R}_{\exists R.C}) \longrightarrow C$ de la propriété F9. Enfin, 3.7 est l'illsutration de l'implication 1 du lemme 2 et 3.8 est le point 4 qui est lui-même conséquence de F13.

Définition 4 (Catégorie minimale) *Une catégorie d'ontologie $\mathscr{C}_c$ est dite* minimale *si pour toute catégorie d'ontologie $\mathscr{C}'_c$, nous avons* $\mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \subseteq \mathsf{Hom}(\mathscr{C}'_c)$.

Comme chaque objet d'une catégorie est muni de sa flèche identité, alors $\mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c) \subseteq \mathsf{Hom}(\mathscr{C}'_c)$ implique $\mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c) \subseteq \mathsf{Ob}(\mathscr{C}'_c)$, d'où nous pouvons nous concentrer uniquement sur les flèches qui impliquent l'existence des objets dans la catégorie en général.
La minimalité est ici pour s'assurer qu'aucun objet ou flèche autre que ce qui est nécessaire pour respecter les propriétés F1 à F13 ne soient ajoutés de manière arbitraire à la catégorie, rendant alors la sémantique complètement caduque. L'existence de catégories saturées et minimales en elle-même découle du fait que ces catégories peuvent être construites de manière algorithmique en utilisant les propriétés 3.1 à 3.8, tout en tenant compte des propriétés usuelles d'une catégorie, notamment la composition de flèche et les propriétés liées aux deux objets terminale et initiale respectivement.
Il peut être remarqué que les propriétés liées exclusivement à la disjonction $\sqcup$ ne sont pas explicites, mais incluses dans les propriétés liées à la distributivité. Il est effectivement possible de montrer que (i) $C \sqcup D \longrightarrow \bot$ implique $C \longrightarrow \bot, D \longrightarrow \bot$ et (ii) $C \longrightarrow \bot, D \longrightarrow \bot$ impliquent $C \sqcup D \longrightarrow \bot$ en utilisant uniquement les propriétés liées à la distributivité dans la définition 3.
Nous sommes alors en capacité d'énoncer clairement la satisfiabilité catégorielle d'un concept par rapport à une TBox.

Définition 5 *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}$ et $\mathcal{O}$ une TBox en $\mathcal{ALC}$. Soit $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ la catégorie d'ontologie NNF saturée minimale de $\mathcal{O}$ et C_0. Alors, le concept C_0 est* insatisfiable catégoriellement par rapport à $\mathcal{O}$ *si la flèche $C_0 \longrightarrow \bot$ est dans* $\mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle)$.

Le théorème suivant assure qu'il y a une équivalence sémantique entre la satisfiabilité ensembliste et catégorielle d'un concept par rapport à une TBox $\mathcal{O}$.

Théorème 1 (Équivalence sémantique) *Soit $\mathcal{O}$ une TBox en $\mathcal{ALC}$ et soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}$. Alors C_0 est insatisfiable catégoriellement par rapport avec $\mathcal{O}$ si et seulement si C_0 est insatisiafable (en ensembliste) par rapport à $\mathcal{O}$.*

Esquisse de preuve ($\Longleftarrow$). La direction de la sémantique catégorielle à la sémantique ensembliste est assez directe à prouver, nous considérons chaque propriétés de la définition 3 et montrons pour chaque flèche $X \longrightarrow Y \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ ajouté, alors $\mathcal{O} \models X \sqsubseteq Y$. Cela se fait grâce au lemme B1 à B6 de [9], ainsi que le lemme 1 et 2. Autrement dit, chaque inclusion de concept qui correspond à une flèche ajoutée par la définition 3 est validée par les axiomes de $\mathcal{O}$ sous la sémantique ensembliste.
($\Longrightarrow$). La direction ensembliste à catégorielle va nous demander un peu plus de travail. Nous allons seulement énoncer les grandes lignes et invitons le lecteur ou la lectrice à consulter la preuve complète dans le rapport technique [9].
Nous commençons par générer grâce à l'algorithme du tableau et à partir d'un concept $\mathcal{ALC}$ insatisfiable par rapport à une ontologie, un ensemble d'arbre de complétion $T = \langle v_0, V, E, L\rangle$ contenant un conflit, *i.e.* $\{A, \neg A\}$ est présent dans le label d'au moins un nœud de T. Nous renvoyons la lectrice ou le lecteur vers [3] pour des détails plus formels sur les algorithmes de tableau.
Lorsqu'une règle **[$\sqcup$-rule]** est appliquée dû à la présence d'une disjonction $X_1 \sqcup X_2$ dans un label $L(v)$, alors nous générons deux nouveaux graphes T_1 et T_2. Ces deux graphes sont des copies de T à l'exception du nœud v qui est remplacé à par des nœuds v_i dans T_i tels que $L(v_i) = L(v) \cup X_i$ pour $i \in \{1, 2\}$. Les v_i sont appelés des nœuds disjoints et v est un nœud de disjonction. Nous définissons alors l'arbre $\mathbb{T}$ dont les nœuds sont les arbres de complétions T. Celui-ci est construit de sorte que si un nœud v possède un conflit, alors il appartient à un arbre feuille et si une règle **[$\sqcup$-rule]** doit être appliqué à un nœud de disjonction v, alors la règle a déjà été appliquée à tous les ancêtres v' de v.
À partir de là, nous construisons une catégorie NNF saturée minimale $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ à partir de $\mathbb{T}$ dont tous les arbres contiennent un conflit. La construction est faite en sorte de pouvoir propager le conflit de chacun des arbres feuilles jusqu'à la racine v_0 de l'arbre racine T_0 de $\mathbb{T}$, dont le label est $L(v_0) = \{C_0\}$. Cette propagation va rencontrer deux problèmes principaux : d'un nœud à son ancêtre qui est un nœud disjoint et de ce nœud disjoint au nœud disjonction qui se trouve dans l'arbre parent dans $\mathbb{T}$. Cependant, les règles de constructions utilisées pour créer $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ permettent de franchir ces obstacles jusqu'à atteindre la racine v_0. Grâce à la propagation, nous en déduisons donc que $C_0 \longrightarrow \bot \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle)$ et donc que C_0 est bien insatisfiable catégoriellement par rapport à $\mathcal{O}$. $\square$

Ce résultat nous fournit un algorithme optimal dans le pire des cas (*i.e* EXPTIME) pour pouvoir déterminer la satifiabilité d'un concept en $\mathcal{ALC}$. En effet, en utilisant directement les propriétés des définitions 1, 2 et 3 comme règles, nous remplaçons le verbe « impliquer » par « ajouter à » tout en vérifiant que l'objet n'a pas été préalablement ajouté, et ainsi nous obtenons un procédé pour construire une catégorie saturée minimale NNF. Il suffit alors de stocker les conjonctions et les disjonctions comme des ensembles de conjoints et disjoints, cela permet d'éviter les doublons ; par exemple, si deux objets partagent le même disjoints ou conjoints. Alors une implémentation de ce type pourrait borner (exponentiellement) le nombre de conjoints et disjoints ajoutés par (3.3) et (3.8).

La question de l'*entailment* peut alors se poser, *i.e.* de savoir si une subsomption est satisfaite pour tout modèle de $\mathcal{O}$. Dans ce cas, nous pourrions répondre à cette question en construisant une catégorie saturée au sens de la définition 3 et vérifier si $C \longrightarrow D$ est une flèche de cette catégorie. Une autre façon est d'utiliser le travail que nous venons de faire. L'équivalence 9 assure que l'existence de la flèche $C \longrightarrow D$ dans la catégorie est équivalente à l'existence de la flèche $C \sqcap \neg D \longrightarrow \perp$ – et donc à l'insatisfiabilité du concept $C \sqcap \neg D$ par définition. Ainsi, pour que $\mathcal{O} \models C \sqsubseteq D$, il faut et il suffit que $\mathscr{C}_c\langle C \sqcap \neg D, \mathcal{O}\rangle$ contienne la flèche $C \sqcap \neg D \longrightarrow \perp$.

4 $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ et raisonnement

Dans cette section, nous allons exploiter la modularité apportée par les propriétés de la théories des catégories. Plus précisément, nous allons utiliser l'indépendance de la propriété F13 par rapport aux autres propriétés, comme illustré dans l'exemple 2. Cette propriété permet de déduire l'interaction entre les constructeurs $\exists$ et $\forall$, interaction qui est en partie responsable de la complexité exponentielle de $\mathcal{ALC}$ [2]. C'est après cette observation que nous avons décidé de développer une nouvelle logique dérivée $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ de $\mathcal{ALC}$ en « affaiblissant » la restriction universelle.

Concrètement, nous enlèverons la propriété 3.8 de la définition 3 et introduirons de nouvelles propriétés à celles déjà existantes. Avant de définir proprement $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$, il a été prouvé, voir le lemme 1, que F13, et donc la propriété 3.8, implique également

$$C \sqcap D \rightarrow \perp \implies \exists R.C \sqcap \forall R.D \longrightarrow \perp \quad (*)$$

Par conséquent, retirer F13 nous prive alors de cette propriété nécessaire pour découvrir certain *conflit* ou clash en anglais. Cependant, comme cela a été montré dans le lemme 1, combinée à F10, la propriété F11 est suffisante (et nécessaire) pour obtenir l'implication $(*)$. Ainsi, même si l'interaction est incomplète, nous en gardons une conséquence tout en obtenant une complexité inférieure comme nous allons le montrer.

Puisque nous voulons conserver F11, *i.e.* la relation $\forall R.C \Longleftrightarrow \neg\exists R.\neg C$, nous pouvons toujours supposer que les objets écrits dans la catégorie sont en NNF. Par la suite, nous écrirons alors $\bar{\forall}$ en lieu et place de $\forall$ pour désigner la restriction universelle *affaiblie* dans la logique $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$.

Définition 6 (Insatisfiabilité catégorielle dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$) *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ et $\mathcal{O}$ une TBox dans cette même logique. Une catégorie d'ontologie $\mathscr{C}_c$ pour $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ est dite* NNF-saturée *en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ si elle satisfait toutes les propriétés de (3.1) à (3.7), ainsi que les deux propriétés suivantes :*

6.1 $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), X \longrightarrow \exists R.C, X \longrightarrow \bar{\forall}R.C' \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *implique* $C \sqcap C' \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c)$

6.2 $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C}_c), C \sqcap C' \longrightarrow \perp, X \longrightarrow \exists R.C, X \longrightarrow \bar{\forall}R.C' \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$ *implique* $X \longrightarrow \perp \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c)$

Dans ce cas, C_0 est dit catégoriellement insatisfiable par rapport à $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ *si la catégorie NNF-saturée minimale en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$, $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$, possède la flèche $C_0 \longrightarrow \perp$,* i.e. $C_0 \longrightarrow \perp \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle)$.

Pour illustrer la différence du pouvoir d'expressivité entre $\mathcal{ALC}$ et $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$, utilisons l'exemple de la TBox $\mathcal{O}_1$ contenant uniquement l'axiome :

$$Y \sqsubseteq \exists R.C \sqcap \bar{\forall}R.D \sqcap \bar{\forall}R.\neg D$$

Dans le contexte de la logique $\mathcal{ALC}$ complète, le regroupement $C \sqcap D \sqcap \neg D$ est suffisant pour rendre Y insatisfiable par rapport à $\mathcal{O}_1$ dans $\mathcal{ALC}$. Cependant, pour la logique $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ ce regroupement n'est pas autorisé. Les seules conjonctions qui pourraient influer sur la satisfiabilité du concept $\exists R.C \sqcap \bar{\forall}R.D \sqcap \bar{\forall}R.\neg D$ sont les objets $C \sqcap D$ et $C \sqcap \neg D$ qui n'ont aucune raison d'avoir une flèche les reliant à $\perp$ dans la catégorie NNF-saturée $\mathscr{C}_c\langle Y, \mathcal{O}_1\rangle$ – le concept est alors bien satisfiable dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ par rapport à $\mathcal{O}_1$. Il est à noter que si un concept est insatisfiable dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$, il l'est *nécessairement* dans la logique $\mathcal{ALC}$ en remplaçant $\bar{\forall}$ par $\forall$, inversement, si un concept est satisfiable dans $\mathcal{ALC}$ l'est également pour $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ en modifiant les bons constructeurs. Pour les deux autres cas, nous ne pouvons pas conclure.

Pour le reste de la section, il nous reste alors à introduire les différentes notions et structures nécessaires à la description et définition de l'alogrithme qui nous permettra de vérifier la satisfiabilité d'un concept C_0 en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ par rapport à une TBox dans cette même logique. Nous pourrions tout simplement construire une catégorie en utilisant directement les propriétés de la définition 6, mais cela reviendrait à ajouter un nombre exponentielle d'objet, notamment à cause de la propriété 3.3.

Pour obtenir un algorithme NP de vérification de la satisfiabilité dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$, nous allons avoir besoin d'une structure intermédiaire que nous appelons *graphe d'objets*. Les nœuds de ce graphe sont labelisés par un ensemble d'objets représentant des *sous-concepts*. Nous désignons alors par $\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ le plus petit ensemble des sous-concepts qui apparaissent dans C_0 et $\mathcal{O}$. De sorte que $\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ contient C_0 et $\mathsf{NNF}(\neg E \sqcup F)$ pour tout $E \sqsubseteq F \in \mathcal{O}$. Il contient également les conjoints des conjonctions, les disjoints des disjonctions et les *fillers* des restrictions existentielles et universelles.

Définition 7 (Graphes d'objets) *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ et $\mathcal{O}$ une TBox. Nous appelons graphe d'objet pour $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$, un graphe $G := \langle V, E, L, v_0\rangle$ tel que V est l'ensemble des nœuds et $v_0 \in V$, E est l'ensemble des arêtes, L est une fonction qui associe à chaque nœud v sont label $L(v) \subseteq \mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ et v_0 est un nœud tel que $C_0 \in L(v_0)$. Un nœud $v \in V$ possède un* conflit *si $\bot \in L(v)$ ou s'il existe un concept atomique A tel que $A, \neg A \in L(v)$ – dans ce cas, nous disons que G* contient un conflit, *sinon G est dit* sans conflit.

Pour déterminer la satisfiabilité d'un concept C_0 en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ par rapport à une TBox $\mathcal{O}$, l'algorithme 1 construit un graphe d'objet $G = \langle V, E, L, v_0\rangle$ avec l'entrée $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$. Il commence par créer le nœud racine v_0 avec $C_0, \top \in L(v_0)$ et ajoute $\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F')$ à $L(v_0)$ pour chaque $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$. Par la suite, tant qu'un changement est effectué sur le graphe, différentes opérations sont opérées sur les labels de chaque nœud $v \in V$. Si $C \sqcap D \in L(v)$ et $\{C, D\} \not\subseteq L(s)$ alors C, D sont ajoutés à $L(v)$; ceci vient de la propriété (3.2). Si $C \sqcup D \in L(v)$ et $L(s) \cap \{C, D\} = \varnothing$ alors l'algorithme choisit d'ajouter soit C, soit D au label de v ; cette règle non-déterministe couvre la propriété (3.3). Un nouveau nœud est créé dans seulement deux cas : le premier cas se présente s'il y a un nœud v tel que $\exists R.C \in L(v)$ et qu'il n'y a pas un autre nœud v' tel que $C \in L(v')$; cette opération est conséquence de (3.6). Le second, s'il existe un nœud v tel que $\exists R.C, \bar{\forall} R.C' \in L(v)$ et qu'il n'y a pas de nœud $v' \in V$ tel que $\{C, C'\} \subseteq L(v)$; ceci est la conséquence de (6.1). Il est à noter qu'à chaque création d'un nouveau nœud v, l'algorithme ajoute $\top$ ainsi que $\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F')$ à $L(v)$ pour tout $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$.
La fonction $\mathsf{search}(v, C, C')$ sert à déterminer si le concepts C ou les concepts C, C' sont présents dans le graphe. Elle commence par chercher parmi les voisins v' de v et retourne faux si $\{C, C'\} \subseteq L(v')$. Sinon elle parcourt tous les autres nœuds de G et retourne vrai si elle ne trouve aucun nœud qui contient les concepts. En conséquence, pour chaque pair $\exists R.C, \bar{\forall} R.C'$, il y a au plus deux nœuds qui sont crées par l'algorithme 1. L'algorithme se termine lorsqu'il n'y a plus aucun changement à faire sur G, *i.e.* tous les éléments de tous les labels n'entraînent plus de modifications de labels, ni de créations de nouveau nœuds.
Regardons le fonctionnement de l'algorithme 1 dans l'exemple suivant.

Exemple 3 *Soit $\mathcal{T}$ une TBox en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ définie comme suit :*

$$\mathcal{T} = \{A \sqsubseteq \exists R.C \sqcap \bar{\forall} R.D, D \sqsubseteq \exists R.E, D \sqsubseteq \bar{\forall} R.F, D \sqsubseteq \bar{\forall} R.H, E \sqcap (F \sqcap H) \sqsubseteq \bot\}$$

Pour que A soit insatisfiable dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ par rapport à $\mathcal{T}$, $\exists R.C \sqcap \bar{\forall} R.D$ et donc D doivent être également insatisfiables. Cela est possible uniquement si E, $E \sqcap F$ ou $E \sqcap H$ sont insatisfiables par rapport $\mathcal{T}$; ce qui n'est pas le cas. Comme A est satisfiable dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ par rapport à $\mathcal{T}$, alors il existe des choix (ligne 10) tels que l'algorithme 1 produise un graphe sans conflit avec l'entrée $\langle A, \mathcal{T}\rangle$. Il est alors possible que l'algorithme produise un graphe $G := \langle V, E, L, v_0\rangle$ où :

$$\begin{array}{rcl}
\{A, \exists R.C, \bar{\forall} R.D, \neg D, \neg E\} & \subseteq & L(v_0) \\
\{C, D, \neg A, \exists R.E, \bar{\forall} R.F, \bar{\forall} R.H, \neg E\} & \subseteq & L(v_1) \\
\{C, \neg A, \neg D, \neg E\} & \subseteq & L(v_2) \\
\{E, \neg A, \neg D, \neg F\} & \subseteq & L(v_3) \\
\{E, F, \neg A, \neg D, \neg H\} & \subseteq & L(v_4) \\
\{E, H, \neg A, \neg D, \neg F\} & \subseteq & L(v_5)
\end{array}$$

qui n'a effectivement aucun conflit et donc vient appuyer le

Input : $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ where C_0 is an $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ concept, $\mathcal{O}$ an ontology
Output : A graph of objects $G = \langle V, E, L, v_0\rangle$

1 Initialize $V \leftarrow E \leftarrow L \leftarrow \varnothing$;
2 Create a node v_0 and set $V \leftarrow V \cup \{v_0\}$, $L(v_0) \leftarrow L(v_0) \cup \{C_0\}$;
3 $L(v_0) \leftarrow L(v_0) \cup \{\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F'), \top\}$ for each $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$;
4 **while** *G is changed* **do**
5   **foreach** *$v \in V$ and $X \in L(v)$* **do**
6   **if** *$X = C \sqcap D$ and $\{C, D\} \not\subseteq L(v)$* **then**
7       $L(v) \leftarrow L(v) \cup \{C, D\}$;
8   **end**
9   **if** *$X = C \sqcup D$ and $\{C, D\} \cap L(v) = \varnothing$* **then**
10   Choose some $X \in \{C, D\}$ and $L(v) \leftarrow L(v) \cup \{X\}$;
11   **end**
12   **if** *$X = \exists R.C$ and there is some $\bar{\forall} R.C' \in L(v)$ and $\mathsf{search}(v, C, C')$* **then**
13   Create a new node v';
14       $V \leftarrow V \cup \{v'\}$, $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{C, C', \top\}$, $E \leftarrow E \cup \{\langle v, v'\rangle\}$;
15       $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F')\}$ for each $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$;
16   **end**
17   **if** *$X = \exists R.C$ and there is no object $\bar{\forall} R.C' \in L(v)$ and $\mathsf{search}(v, C, \top)$* **then**
18   Create a new node v';
19       $V \leftarrow V \cup \{v'\}$, $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{C, \top\}$, $E \leftarrow E \cup \{\langle v, v'\rangle\}$;
20       $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F')\}$ for each $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$;
21   **end**
22   **if** *$X = \forall R.C$ and there is some $\exists R.C' \in L(v)$ and $\mathsf{search}(v, C, C')$* **then**
23   Create a new node v';
24       $V \leftarrow V \cup \{v'\}$, $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{C, C', \top\}$, $E \leftarrow E \cup \{\langle v, v'\rangle\}$;
25       $L(v') \leftarrow L(v') \cup \{\mathsf{NNF}(\neg F \sqcup F')\}$ for each $F \sqsubseteq F' \in \mathcal{O}$;
26   **end**
27   **end**
28 **end**
29 **return** G;

Algorithme 1 : Construction d'un graphe G pour $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$.

fait que A soit satisfiable par rapport à $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$.

Une procédure de décision sur la satisfiabilité revient alors à soit trouver un graphe G sans conflit, auquel cas le concept C_0 est bien satisfiable par rapport $\mathcal{O}$, soit à montrer que tous les graphes G générés grâce à l'algorithme contiennent un conflit. Il nous reste à prouver que effectivement un concept C_0 est satisfiable par rapport à une TBox $\mathcal{O}$, dans le sens de la sémantique ensembliste, si et seulement si la catégorie saturée NNF, $\mathscr{C}_c\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ ne contient pas de flèche $C_0 \longrightarrow \perp$.

Lemme 3 (Correction et complétude) *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ et $\mathcal{O}$ une TBox. Si l'algorithme 1 prend $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ en entrée, alors il retourne un graphe d'objets sans conflit si et seulement si C_0 est satisfiable par rapport à $\mathcal{O}$.*

Esquisse de preuve "$\Longrightarrow$". Nous commençons par définir une catégorie $\mathscr{C}$ à partir de tous les $G = \langle V_G, E_G, L_G, v_G^0\rangle$ générés par l'algorithme 1. En nous basant sur des propriétés particulières de $L_G(v)$ pour $v \in V_G$, nous définissons L'_G tel que (i) $L'_G(v)$ contient un objet minimal, que nous nommons $\mathsf{core}(v)$ de tel sorte qu'il y ait une flèche $\mathsf{core}(v) \longrightarrow C$ pour tout $C \in L'_G(v)$ et (ii) $L'_G(v)$ est « fermé » par les flèches $X \longrightarrow Y \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ dans le sens où si $X \longrightarrow Y$ est une flèche de $\mathscr{C}$ alors $X \in L'_G(v)$ implique $Y \in L'_G(v)$.
Pour construire cette catégorie, nous initialisons $\mathscr{C}$, une fonction $\mathsf{core}(v)$ qui associe à chaque v dans $\bigcup_G V_G$ une conjonction d'objets dans $L_G(v)$ et une fonction de label $L'_G(v)$ définie depuis $L_G(v)$ avec $L_G(v) \subseteq L'_G(v)$. Tous ces objets sont initialisés de sorte que chacune les propriétés (S1) à (S5), voir [9], restent invariantes à chaque changement effectué sur $\mathscr{C}$ par l'application une propriété de $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$.

(S1) Si $X \in L'_G(v) \setminus L_G(v)$, alors soit $X = \perp$ ou X est une conjonction d'objets de $L_G(v)$;

(S2) Si $X \longrightarrow Y \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ et $X \in L'_G(v)$ pour $v \in V_G$, alors $Y \in L'_G(v)$;

(S3) Si $X \longrightarrow Y \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ alors soit $Y = \mathsf{NNF}(\neg E \sqcup F)$ que nous appelons alors *objets axiomes*, avec $E \sqsubseteq F \in \mathcal{O}$ ou Y un conjoint de X ou bien $Y = \perp$.

(S4) Pour chaque $v \in \bigcup_G V_G$, il y a une flèche $\mathsf{core}(v) \longrightarrow U \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ pour tout $U \in L'_G(v)$.

(S5) Si $A, \neg A \in L'_G(v)$ pour $v \in V_G$, où A est un concept atomique, alors $\perp \in L'_G(v)$.

Nous montrons alors qu'en appliquant toutes les propriétés de $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ à $\mathscr{C}$, nous obtenons (i) que tous les objets venant de tous les graphes G générés par l'algorithme 1 peuvent être ajoutés à $\mathscr{C}$ et (ii) que (S1)-(S5) soient invariants. Nous prouvons également que $\mathscr{C}$ est NNF-saturée et minimale.
Par hypothèse, il existe un graphe G_0 sans conflit généré par l'algorithme. Supposons alors que $C_0 \longrightarrow \perp$ est une flèche de $\mathscr{C}$, autrement dit que C_0 est insatisfiable par rapport à $\mathcal{O}$. Alors par (S2), nous avons $\perp \in L'(v_{G_0}^0)$ pour un nœud v^0. Par hypothèse, $\perp \notin L(v_{G_0}^0)$ et donc par (S1), $\perp$ doit être la conjonction de deux objet, nécessairement $A \sqcap \neg A$ et par conséquent $A, \neg A \in L(v_{G_0}^0)$ ce qui contredit le fait que G_0 soit sans conflit.
"$\Longleftarrow$". Supposons que $\mathscr{C}$ est une catégorie minimale saturée NNF telle que $C_0 \longrightarrow \perp$ n'est *pas* une flèche de $\mathscr{C}$. Nous allons montrer que l'algorithme 1 peut générer un graphe sans conflit.
Pour cela, nous initialisons un graphe d'objet $G = \langle V, E, L, v_0\rangle$ et une fonction $\mathsf{core}(v)$ qui associe à chaque nœud $v \in V$ une conjonction d'objet dans $L(v)$. Nous avons également besoin d'une fonction L' définie à partir de L telle que $L(v) \subseteq L'(v)$ pour $v \in V$. Pendant l'exécution de l'algorithme 1, G, L' et core vont être mis à jour et étendus de sorte que les propriétés (C1) à (C4), voir [9], soient vérifiées.

(C1) Si $X \in L'(v) \setminus L(v)$ alors X est une conjonction d'objet de $L(v)$;

(C2) Pour tout $v \in V$, si $C \in L'(v)$ alors $C \in \mathsf{Ob}(\mathscr{C})$.

(C3) Pour tout $v \in V$, nous avons $\mathsf{core}(v) = \bigsqcap_{X \in \Gamma} X$, avec $\Gamma \subseteq L(v)$ et $\mathsf{core}(v) \longrightarrow X \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ pour tout $X \in L'(v)$

(C4) $\mathsf{core}(v) \longrightarrow \perp \notin \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ pour tout $v \in V$.

Par l'absurde, nous supposons que G possède un conflit, *i.e.* $\perp \in L(v)$ ou $A, \neg A \in L(v)$ pour un $v \in V$. Comme $L(v) \subseteq L'(v)$ alors $\perp \in L'(v)$ ou $A, \neg A \in L'(v)$. Dans les deux cas, d'après (C3) nous avons $\mathsf{core}(v) \longrightarrow \perp \in \mathsf{Hom}(\mathscr{C})$ ce qui est en contradiction avec (C4). □

Lemme 4 (Complexité) *Soit C_0 un concept en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ et $\mathcal{O}$ une TBox. L'algorithme 1 s'exécute en un temps polynomial non-déterministe par rapport à la taille de $\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$.*

Esquisse de preuve La complexité de l'algorithme 1 dépend principalement de la taille de $\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$, noté $|\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle|$ ainsi que de $|V|$ pour le graphe $G := \langle V, E, L, v_0\rangle$ construit par l'algorithme. Comme nous pouvons voir les sous-concepts comme de sous-chaînes de caractères de C_0 et $\mathcal{O}$ vus eux-même comme des chaînes de caractères, alors nous obtenons que $|\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle| \leqslant n(n+1)/2 = O(n^2)$ où $n = \|\langle C_0, \mathcal{O}\rangle\|$ est la taille en octets pour pouvoir stocker C_0 et $\mathcal{O}$. Notons $n_\exists$ et $n_{\bar{\forall}}$ le nombre d'éléments de $\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle$ de la forme $\exists R.C$ et $\bar{\forall} R.C$ respectivement. Nous pouvons alors montrer que pour le nombre de nœuds $n_v = |V|$, nous avons bien $n_v \leqslant n_\exists(n_{\bar{\forall}} + 1)$. De plus, nous avons également que $|L(v)|$, $n_\exists$ et $n_{\bar{\forall}}$ sont tous plus petit ou égaux à $|\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle|$.
L'algorithme s'arrête lorsqu'il n'y a plus de changements effectués, *i.e.* la boucle (ligne 4) s'arrête après avoir effectué $n_{\mathsf{iter}} \leqslant n_\exists(n_{\bar{\forall}} + 1) \times |\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle| \leqslant (|\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle|)^3$ itérations de la boucle ligne 5. Pour chaque itérations, il y a au plus $m+4$ opérations avec $m := |\mathcal{O}|$. Il y a donc au plus $(|\mathsf{sub}\langle C_0, \mathcal{O}\rangle|)^3 \times (m+4) \leqslant O(n^6)$ opérations faites par l'algorithme. Ainsi, l'algorithme 1 s'exécute en un temps polynomial non-déterministe en la taille de l'entrée. □

Lemme 5 *Le problème de satisfiabilité d'un concept en $\mathcal{ALC}_{\bar{\forall}}$ est* NP*-difficile.*

Ce lemme est conséquence du fait que $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ inclue la logique propositionnelle qui est connue pour être NP-complète [7]. Le théorème suivant est lui conséquence des lemmes 4 et 5.

Théorème 2 *Le problème de satisfiabilité dans $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ est* NP-*complet.*

5 Conclusion

Nous venons de présenter une réécriture la sémantique usuelle ensembliste de $\mathcal{ALC}$ en terme de théorie des catégories et un nouveau langage défini à partir de $\mathcal{ALC}$ utilisant cette réécriture.

Grâce à l'absence de l'appartenance ensembliste dans la théorie des catégories, nous avons besoin de deux propriétés indépendantes pour illustrer la restriction universelle et son interaction la restriction existentielle. En affaiblissant cette dernière, nous avons pu obtenir un nouvelle langage $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$ qui est NP-complet en terme de satisfiabilité, alors que $\mathcal{ALC}$ est EXPTIME-complet. Il est à noté que ce n'est pas cette interaction affaiblie qui est responsable de la NP-complètude de $\mathcal{ALC}_{\overline{\forall}}$, mais bien celle de la conjonction et disjonction.

Cette observation nous donne l'espoir de pouvoir obtenir de nouveau langage tractable pouvant être étendue grâce à cette version affaiblie de la restriction universelle.

Nous sommes actuellement en train de terminer l'implémentation de l'algorithme pour le comparer avec d'autres raisonneurs sur des ontologies choisies. Pour nos prochains travaux, nous explorons aussi une nouvelle logique possédant non seulement une version affaiblie de l'interaction entre la restriction universelle et existentielle, mais également une distributivité affaiblie entre la conjonction et la disjonction. Cette nouvelle logique serait alors tractable d'après nos résultats. Nous pourrions alors ajouter les deux nouveaux constructeurs affaiblies à $\mathcal{EL}$++ qui est, comme nous l'avons mentionné, la logique de description sous-jacente pour de nombreuses ontologies médicales.

Références

[1] Franz Baader, Diego Calvanese, Deborah L. McGuinness, Daniele Nardi, and Peter F. Patel-Schneider, editors. *The Description Logic Handbook : Theory, Implementation and Applications, Second Edition*. Cambridge University Press, 2010.

[2] Franz Baader, Ian Horrocks, Carsten Lutz, and Uli Sattler. *An Introduction to Description Logic*. Cambridge University Press, 2017.

[3] Franz Baader and Ulrike Sattler. Tableau algorithms for description logics. In *Proceedings of the International Conference on Automated Reasoning with Tableaux and Related Methods*, volume 1847, page 118, St Andrews, Scotland, UK, 2000. Springer-Verlag.

[4] Ludovic Brieulle, Chan Le Duc, and Pascal Vaillant. Reasoning in the description logic ALC under category semantics (extended abstract). In *Proceedings of the 35th International Workshop on Description Logics (DL 2022)*, volume 3263 of *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org, 2022.

[5] Werner Ceusters, Peter Elkin, and Barry Smith. Negative findings in electronic health records and biomedical ontologies : A realist approach. *International Journal of Medical Informatics*, 76 :S326–S333, 2007.

[6] Mihai Codescu, Till Mossakowski, and Oliver Kutz. A categorical approach to networks of aligned ontologies. *J. Data Semant.*, 6(4) :155–197, 2017.

[7] Cook. The Complexity of Theorem-Proving Procedures. *STOC '71, Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158, 1971.

[8] B. Cuenca Grau, I. Horrocks, B. Motik, B. Parsia, P. Patel-Schneider, and U. Sattler. Owl 2 : The next step for owl, journal of web semantics : Science, services and agents. *World Wide Web*, 6 :309–322, 2008.

[9] Ludovic Brieulle et Chan Le Duc. Rapport technique : Sémantique catégorielle de logique de description et raisonnement. http://limics2.univ-paris13.fr/~brieulle/JIAF2025TR.pdf, 2025.

[10] Clemens Kupke and Dirk Pattinson. Coalgebraic semantics of modal logics : An overview. *Theoretical Computer Science*, 412(38) :5070–5094, 2011.

[11] Chan Le Duc. Category-theoretical semantics of the description logic alc. In Martin Homola, Vladislav Ryzhikov, and Renate A. Schmidt, editors, *Proceedings of the 34th International Workshop on Description Logics (DL 2021)*, volume 2954 of *CEUR Workshop Proceedings*. CEUR-WS.org, 2021.

[12] Sounders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.

[13] Lawrence S. Moss. Coalgebraic logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 96(1) :277–317, 1999.

[14] Peter Patel-Schneider, P. Hayes, and Ian Horrocks. Owl web ontology language semantics and abstract syntax. In *W3C Recommendation*, 2004.

[15] Klaus Schild. A Correspondence Theory for Terminological Togics : Preliminary Report. In *Proceedings of the 12th international joint conference on Artificial intelligence*, pages 466–471, 1991.

[16] David I Spivak and Robert E Kent. Ologs : a categorical framework for knowledge representation. *PloS one*, 7(1) :e24274, 2012.