

# Accord entre Règles de Vote sous des Distributions de Préférences "Single-Peaked"

Vincent Mousseau<sup>1</sup>, Henri Surugue<sup>1</sup>, Anaëlle Wilczynski<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MICS, CentraleSupélec, Paris-Saclay

## Résumé

*De nombreuses règles de vote ont été proposées dans la littérature et elles peuvent sélectionner des alternatives très différentes. La question se pose alors de savoir si cette diversité de gagnants se produit souvent en pratique. Des travaux antérieurs ont montré que la probabilité que les règles de vote s'accordent sur le même résultat est généralement assez faible sous des cultures de préférences uniformes. Dans cet article, nous utilisons une approche probabiliste similaire en se penchant sur des cultures "single-peaked", qui sont plus structurées et plus réalistes que les cultures uniformes. Nous fournissons des conditions pour que les règles de vote s'accordent sous ces cultures et nous montrons que la probabilité d'accord d'une grande famille de règles de vote est beaucoup plus élevée dans ce cadre, avec une convergence rapide en fonction du nombre de votants. Enfin, nous donnons un aperçu d'autres distributions de préférences structurées, en observant que nombre d'entre elles présentent une convergence similaire, y compris la distribution de Mallows. Notre étude révèle que plusieurs cultures de vote bien établies ont tendance à biaiser le résultat des règles de vote dans une même direction, ce qui vaudrait d'être connu avant de mener des expériences sur des données synthétiques.*

## Mots-clés

*Choix social computationnel, Théorie du vote, Restrictions de préférences, Etude statistique.*

## 1 Introduction

L'un des principaux thèmes de la théorie du vote est la conception de bonnes règles de vote. Cependant, la littérature sur le choix social est célèbre pour ses théorèmes d'impossibilité, par exemple les théorèmes d'Arrow ou de Gibbard-Satterthwaite, qui suggèrent qu'il n'existe pas de règle de vote parfaite. De nombreuses règles de vote différentes ont été conçues dans la littérature, et elles peuvent sélectionner des alternatives très différentes. On peut alors se demander si ce comportement se produit souvent. Cette question a été soulevée par de nombreux articles [6] qui étudient la probabilité que différentes règles de vote soient en accord sur leur résultat.

La plupart des travaux sur l'accord des règles de vote se concentrent sur les cultures impartiales. Cepen-

dant, ces cultures ne rendent pas compte de préférences réelles de votants, qui sont généralement loin d'être uniformément distribuées. En outre, la plupart des résultats sur les cultures impartiales soulignent que les règles de vote donnent rarement le même résultat. Par conséquent, l'exploration de cultures plus structurées et plus réalistes peut fournir de nouvelles informations sur les différences entre les règles de vote. Dans cet article, nous nous concentrons sur des cultures générant des préférences dites "single-peaked" [1], qui sont pertinentes dans plusieurs contextes tels que, par exemple, les élections politiques où un axe gauche-droite peut structurer les préférences de la plupart des votants. Même si les cultures "single-peaked" sont encore loin de correspondre parfaitement à des données réelles, elles sont beaucoup plus réalistes et peuvent être considérées comme une meilleure approximation de la réalité dans certains contextes.

D'un autre point de vue, l'étude de l'accord entre les règles de vote dans les cultures "single-peaked" peut également améliorer la compréhension de ces dernières tant d'un point de vue théorique que pour les expériences. En effet, une question clé en choix social computationnel, et en particulier dans la théorie du vote, est de savoir comment générer des données synthétiques pertinentes pour des expériences sur les élections [2]. La réalisation d'une étude empirique à l'aide de simulations numériques peut en effet s'avérer très utile pour étayer ou compléter des résultats théoriques dans de nombreux problèmes de vote [3]. Par conséquent, l'étude de l'accord des règles de vote dans les cultures "single-peaked" est pertinente pour mieux comprendre ces cultures qui sont couramment utilisées, et mieux interpréter les études expérimentales. Dans l'absolu, la connaissance du fonctionnement de l'outil statistique est une condition préalable à une bonne étude empirique.

Dans cet article, nous étudions la probabilité d'accord de différentes règles de vote dans des cultures "single-peaked". À notre connaissance, cette question a été étonnamment négligée pour des cultures plus structurées que les cultures impartiales. Une exception notable est le travail de Chatterjee and Storcken [4] sur les profils unimodaux.

## 2 Le Modèle

Soient  $N$  un ensemble de  $n$  votants, et  $M$  un ensemble de  $m$  candidats. Les préférences de chaque votant  $i \in N$  sont représentées par un ordre linéaire  $\succ_i$  sur  $M$ . Le profil de préférences est noté  $\succ = (\succ_i)_{i \in N}$  et  $\Pi^m$  désigne l'ensemble de tous les ordres de préférence possibles sur  $m$  candidats. Un profil de préférences  $\succ \in (\Pi^m)^n$  est dit "single-peaked" s'il existe un axe  $>$  sur  $M$  tel que, pour tout votant  $i \in N$  et tout triplet de candidats  $x > y > z$ , on ait  $y \succ_i x$  ou  $y \succ_i z$ .

Les gagnants de l'élection sont déterminés par une règle de vote qui associe à chaque profil de préférences un sous-ensemble non vide de candidats. Une règle de vote par score sélectionne les candidats maximisant une fonction de score attribuant un score à chaque candidat. Si le score d'un candidat est calculé en fonction de son rang dans l'ordre de préférence de chaque votant, la règle de vote associée est appelée une *règle de score positionnelle (PSR)*. Les PSRs incluent les règles de vote comme pluralité, veto,  $k$ -approbation, ainsi que la règle de Borda. Une règle de vote est dite *Condorcet-consistante* si elle élit le vainqueur de Condorcet lorsqu'il existe, c'est-à-dire le candidat qui bat tous les autres en comparaison par paires.

## 3 Résultats

Nous étudions d'abord la distribution de Walsh [7], qui correspond à la culture impartiale sur le domaine "single-peaked". Nous établissons que cette distribution favorise fortement les candidats médians, c'est-à-dire les candidats situés au centre de l'axe "single-peaked", puisqu'ils sont les gagnants espérés de toute PSR. Ensuite, nous donnons une caractérisation de toutes les PSRs pour lesquelles les candidats médians sont les seuls gagnants espérés, et montrons qu'elle correspond asymptotiquement à toutes les règles Condorcet-consistantes. Nous donnons également une borne inférieure exponentielle pour la probabilité d'accord de ces règles de vote.

Ensuite, nous examinons la distribution de Conitzer [5], qui sélectionne uniformément le candidat en tête pour générer des ordres "single-peaked". Nous caractérisons les gagnants espérés de toutes les règles de  $k$ -approbation, ainsi que de toutes les PSRs qui tendent à élire les candidats médians, lesquels sont également le résultat asymptotique des règles Condorcet-consistantes, et nous donnons une borne inférieure exponentielle pour cette probabilité.

Dans une étude orthogonale, nous identifions des distributions "single-peaked" qui ne favorisent, par construction, aucun candidat, relativement à une PSR donnée.

Enfin, nous explorons d'autres distributions structurées de préférences afin de déterminer si des résultats similaires peuvent être obtenus. Nous étudions des distributions unimodales, incluant la célèbre dis-

tribution de Mallows, et donnons quelques perspectives sur les urnes de Pólya-Eggenberger.

## 4 Conclusions et Perspectives

Nous avons identifié des cultures dans lesquelles l'accord des différentes règles de vote est rapide lorsque le nombre de votants augmente. Ainsi, les conclusions tirées d'expériences testant différentes règles de vote pour un problème donné doivent être interprétées avec prudence. On pourrait imaginer des conclusions très différentes sur un problème, non pas en raison du problème lui-même, mais en raison de la culture utilisée : cultures impartiales contre cultures "single-peaked", par exemple. Les travaux futurs pourraient porter sur la probabilité d'accord lors d'élections finies en nombre de votants avec une culture de Pólya-Eggenberger. La difficulté réside toutefois dans la structure dépendante de cette distribution. Une idée pourrait également être de considérer des distributions quasi "single-peaked" pour combler l'écart entre les cultures impartiales et "single-peaked" et se rapprocher d'élections politiques réelles. Enfin, la même étude pourrait être réalisée dans un modèle stratégique où les votants peuvent manipuler.

## Références

- [1] Duncan Black. On the rationale of group decision-making. *Journal of Political Economy*, 56(1) :23–34, 1948.
- [2] Niclas Boehmer, Piotr Faliszewski, Łukasz Janeczko, Andrzej Kaczmarczyk, Grzegorz Lisowski, Grzegorz Pierczyński, Simon Rey, Dariusz Stolicki, Stanisław Szufa, and Tomasz Wąs. Guide to numerical experiments on elections in computational social choice. In *Proceedings of IJCAI 2024*, pages 7962–7970, 2024.
- [3] Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, and Ariel D. Procaccia. *Handbook of computational social choice*. Cambridge University Press, 2016.
- [4] Swarnendu Chatterjee and Ton Storcken. Frequency based analysis of collective aggregation rules. *Journal of Mathematical Economics*, 87 :56–66, 2020.
- [5] Vincent Conitzer. Eliciting single-peaked preferences using comparison queries. In *Proceedings of AAMAS 2007*, pages 420–427, 2007.
- [6] William V. Gehrlein and Dominique Lepelley. *Voting paradoxes and group coherence : the Condorcet efficiency of voting rules*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] Toby Walsh. Generating single peaked votes. *arXiv preprint arXiv :1503.02766*, 2015.