40 ans de recherche en logique possibiliste - Une vue d'ensemble

Didier Dubois[1], Henri Prade[1]

[1] IRIT, CNRS & Université Toulouse III - Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France

{didier.dubois, henri.prade}@irit.fr

Résumé

Les premiers éléments de logique possibiliste datent de 40 ans. Cette logique manipule des formules logiques classiques associées à des pondérations prenant des valeurs dans un ensemble linéairement ordonné ou plus généralement dans un treillis. Au cours des décennies, la logique possibiliste a connu de nombreux développements tant au niveau théorique qu'au niveau appliqué. L'ambition de cet article est de passer en revue ces développements tout en exposant les idées principales qui les sous-tendent.

Mots-clés

théorie des possibilités, logique, incertitude, préférence.

Abstract

The first elements of possibilistic logic date back 40 years. This logic handles classical logic formulas associated with weights taking values in a linearly ordered set or more generally in a lattice. Over the decades, possibilistic logic has undergone numerous developments at both theoretical and applied levels. The goal of this article is to review all these developments while exposing the main ideas behind them.

Keywords

possibility theory, classical logic, uncertainty, preference.

1 Introduction

La logique possibiliste est issue de la théorie des possibilités. Cette théorie offre un cadre pour la représentation de l'incertitude épistémique due à une information incomplète. Cette théorie a été d'abord proposée par un économiste, G. L. S. Shackle [80], qui a introduit un calcul de degrés de surprise potentielle (qui sont des degrés d'impossibilité) ; elle a été redécouverte indépendamment par L. A. Zadeh [84] qui s'est concentré sur l'idée de possibilité graduelle en relation avec la modélisation de l'information linguistique, et finalement développée dans [45] en utilisant conjointement la double paire de mesures de possibilité et de nécessité associées à une distribution de possibilité.

La logique possibiliste [41] (dans sa forme de base) manipule des formules logiques classiques associées à des bornes inférieures de mesures de nécessité entendues comme des niveaux de certitude. La règle du modus ponens prend alors, sémantiquement, la forme :

$$N(p) \geq \alpha, N(p \to q) \geq \beta \Rightarrow N(q) \geq \min(\alpha, \beta),$$

où N est une mesure de nécessité, p et q sont des formules logiques, et $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Cela correspond à l'intuition (remontant à Théophraste [77]) selon laquelle la force d'une conclusion reflète la force de la prémisse la plus faible. Cette règle d'inférence pondérée apparaît pour la première fois en 1982.[1] Cependant, ce n'est qu'au milieu des années 1980 que les premiers éléments d'une logique possibiliste à part entière ont commencé à être développés [59, 39].

Les informations incomplètes sont présentes partout et il est important de gérer correctement l'incertitude épistémique. Comme nous le verrons, la logique possibiliste, en stratifiant la connaissance en niveaux de certitude, offre un cadre simple, proche de la logique classique, pour traiter l'incertitude et l'incohérence, mais la logique possibiliste peut aussi prendre d'autres formes, comme les réseaux ou les matrices possibilistes. De plus, la logique possibiliste hérite sa polyvalence de la puissance de représentation de la théorie des possibilités.

Cet article propose une vue d'ensemble - aussi complète que possible en 10 pages - des travaux sur la logique possibiliste depuis 40 ans. Il y a déjà eu plusieurs synthèses sur le sujet depuis [47] qui sont maintenant en partie dépassées. Certaines se concentrent sur les relations avec la logique modale [51], d'autres offrent une perspective plus appliquée [52]. En outre, il existe aussi des introductions plus longues et plus détaillées (mais désormais incomplètes) [41, 48]. Le présent article, avec une structure renouvelée, offre un nouveau regard sur la logique possibiliste.

L'exposé est organisé en deux parties principales. La première partie présente les principaux aspects théoriques et insiste sur les questions de représentation. La seconde partie passe en revue une série de domaines de recherche en IA auxquels la logique possibiliste a été appliquée et peut encore contribuer. Plus précisément, la première partie, après un rappel sur les mesures de possibilité et de nécessité, présente la syntaxe, la sémantique et la théorie de la preuve de la logique possibiliste de base où seules des contraintes de la forme $N(p) \geq \alpha$ sont traitées. Puis, les principales caractéristiques du calcul matriciel possibiliste et des réseaux possibilistes (de type bayésien) sont présentées. Ensuite, divers types d'extensions de la logique possi-

1. [Prade, Thèse d'Etat, 1982] ; [Prade, IJCAI'1983,130-136] (éq. 56).

biliste sont passés en revue : i) pour traiter l'incohérence ; ii) pour prendre en compte des niveaux de certitude symboliques (dont la valeur précise reste inconnue) ; iii) pour introduire de nouveaux types de poids afin de traiter le temps, le multi-sources, les agents, les raisons argumentatives, ou les niveaux de certitude mal connus, grâce à l'utilisation de fonctions de possibilité et de nécessité généralisées prenant leurs valeurs sur un treillis booléen ou sur un treillis distributif pseudo-complémenté plutôt que sur une échelle linéaire ; iv) pour faire face à l'information bipolaire (c'est-à-dire ayant des composantes positives et négatives) grâce à la notion de possibilité garantie, une autre fonction d'ensemble de la théorie des possibilités ; v) pour gérer non seulement les conjonctions, mais aussi les négations et les disjonctions des contraintes présentes en logique possibiliste de base. La première partie se termine par une brève discussion sur le lien avec deux calculs proches : les fonctions de classement de Spohn et la logique de Markov. La deuxième partie passe en revue l'utilisation de la logique possibiliste dans le raisonnement par défaut, la révision des croyances, la fusion d'informations, les logiques de description, la programmation logique, la modélisation des préférences et la décision, l'argumentation et l'apprentissage automatique. Une sous-section est également consacrée à des applications en base de données, en raison de leurs liens étroits avec la représentation des connaissances.

2 Questions théoriques et représentationnelles

Cette première partie traite des bases de la logique possibiliste et des cadres de représentation associés, avant de présenter diverses extensions de la logique possibiliste, et enfin de discuter des relations avec d'autres cadres.

2.1 Théorie des possibilités

En théorie des possibilités, les informations disponibles sont représentées par des distributions de possibilité. Une distribution de possibilité est une application π d'un ensemble U, compris comme un ensemble d'états, de valeurs ou d'alternatives, mutuellement exclusifs (dont l'un est le monde réel, si U est exhaustif), dans une échelle totalement ordonnée $\mathcal{S}$ bornée, dont le plus grand élément est noté 1 et le plus petit 0. Différents types d'échelles peuvent être utilisés depuis une échelle finie $\mathcal{S} = \{1 = \lambda_1 > \dots \lambda_n > \lambda_{n+1} = 0\}$ dans le cas qualitatif, jusqu'à l'intervalle unitaire $\mathcal{S} = [0, 1]$ dans le cas quantitatif, voir [50] pour d'autres options. $\pi(u) = 0$ signifie que u est rejeté comme impossible ; $\pi(u) = 1$ signifie que l'état u est entièrement possible. Plus $\pi(u)$ est grand, plus u est possible. La cohérence de l'état épistémique décrit par π est exprimée par la condition de normalisation $\exists u, \pi(u) = 1$ qui garantit qu'au moins un u est entièrement possible. Si l'information est sans incertitude, mais peut-être imprécise, π est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble E de U et $\pi(u) \in \{0, 1\}$. L'information complète correspond aux situations où E est un singleton. L'échelle $\mathcal{S}$ est supposée équipée d'une bijection inversant l'ordre $\lambda \in \mathcal{S} \mapsto 1 - \lambda \in \mathcal{S}$.

Une mesure de possibilité Π et une mesure de nécessité duale N sont associées à une distribution de possibilité π : $\forall A \subseteq U$,
$\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi(u)$; $N(A) = 1 – \Pi(A^c) = \inf_{u \notin A} 1 – \pi(u)$ avec $A^c = U \setminus A$. Lorsque la distribution de possibilité se réduit à un sous-ensemble classique $E \subseteq U$, on a : i) $\Pi(A) = 1$ si $A \cap E \neq \emptyset$, et 0 sinon ; ii) $N(A) = 1$ si $E \subseteq A$, et 0 sinon. $\Pi(A)$ (resp. $N(A)$) évalue à quel point l'événement A est cohérent avec π (resp. est impliqué par π). Par normalisation, $\Pi(U) = N(U) = 1$ et $\Pi(\emptyset) = N(\emptyset) = 0$.
Les mesures de possibilité sont caractérisées par la propriété de « maxitivité » $\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$, et les mesures de nécessité sont « minitives » : $N(A \cap B) = \min(N(A), N(B))$. En raison de la normalisation de π, $\min(N(A), N(A^c)) = 0$ et $\max(\Pi(A), \Pi(A^c)) = 1$, ou de manière équivalente $\Pi(A) = 1$ lorsque $N(A) > 0$, à savoir que quelque chose de quelque peu certain doit être entièrement possible, c'est-à-dire cohérent avec l'information disponible. De plus, on ne peut pas être quelque peu certain à la fois de A et de A^c, sans être incohérent. Nous n'avons que $N(A \cup B) \geq \max(N(A), N(B))$, ce qui va bien avec l'idée qu'on peut être certain de l'événement $A \cup B$, sans être vraiment certain d'événements plus spécifiques comme A ou comme B. La possibilité et la nécessité se différencient d'une probabilité P, qui est auto-duale, et telle que $P(A^c) = 0 \Rightarrow P(A) = 1$, tandis que $N(A^c) = 0 \not\Rightarrow N(A) = 1$ (mais $\Pi(A^c) = 0 \Rightarrow \Pi(A) = 1$).
Les énoncés qualifiés en termes de certitude de la forme « A est certain au degré α » sont représentés par la contrainte $N(A) \geq \alpha$. La plus grande distribution de possibilité π, donc la moins restrictive, qui obéit à cette contrainte est donnée par [45] : $\pi_{(A,\alpha)}(u) = 1$ si $u \in A$, $\pi_{(A,\alpha)}(u) = 1 - \alpha$ sinon. Si $\alpha = 1$ on obtient la fonction caractéristique de A. Si $\alpha = 0$, on obtient l'ignorance totale. C'est un élément clé de la sémantique de la logique possibiliste.

2.2 Logique possibiliste de base

Une formule de logique possibiliste de base (LPB en abrégé) est une paire (p, α) où p est une formule en logique classique et α un niveau de certitude dans $\mathcal{S} \setminus \{0\}$, considéré comme une borne inférieure d'une mesure de nécessité : (p, α) signifie sémantiquement $N(p) \geq \alpha$. En raison de la minitivité des mesures de nécessité, une base en LPB, c'est-à-dire un ensemble de formules de LPB, peut être mise sous une forme clausale équivalente.

Aspects syntaxiques Nous nous intéressons ici au cas où p dans (p, α) est une proposition ; pour la logique possibiliste du *premier ordre* (de base), voir [41].

Axiomes et règles d'inférence. Les axiomes de LPB [41] sont ceux de la logique propositionnelle, où chaque schéma d'axiomes a une certitude 1. Ses règles d'inférence sont :
- si $\beta \leq \alpha$ alors $(p, \alpha) \vdash (p, \beta)$ (diminution de la certitude)
- $(\neg p \vee q, \alpha), (p, \alpha) \vdash (q, \alpha), \forall \alpha \in (0, 1]$ (modus ponens).

De plus, la règle d'inférence suivante est valide :
- $(\neg p \vee q, \alpha), (p \vee r, \beta) \vdash (q \vee r, \min(\alpha, \beta))$ (résolution)

La règle d'inférence suivante d'*affaiblissement de la formule*, est aussi valide, en conséquence de la α-β-résolution :
- si $p \vdash q$ alors $(p, \alpha) \vdash (q, \alpha)$, $\forall \alpha \in (0, 1]$.

Inférence et cohérence. Soit $K = \{(p_i, \alpha_i), i = 1, ..., m\}$ un ensemble de formules en LPB. Prouver $K \vdash (p, \alpha)$ revient alors à prouver $K, (\neg p, 1) \vdash (\bot, \alpha)$ par application répétée de la règle de résolution. De plus, notons que $K \vdash (p, \alpha)$ ssi $K_\alpha \vdash (p, \alpha)$ ssi $(K_\alpha)^* \vdash p$, où $K_\alpha = \{(p_i, \alpha_i) \in K, \alpha_i \geq \alpha\}$ et $K^* = \{p_i \mid (p_i, \alpha_i) \in K\}$. Les niveaux de certitude stratifient la base de connaissances K en coupes de niveaux imbriquées K_α, c'est-à-dire $K_\alpha \subseteq K_\beta$ si $\beta \leq \alpha$. Une conséquence (p, α) de K ne peut être obtenue qu'à partir de formules dans K_α.
Le *niveau d'incohérence* de K est défini par $inc(K) = \max\{\alpha | K \vdash (\bot, \alpha)\}$. Les formules (p_i, α_i) dans K telles que $\alpha_i > inc(K)$ sont à l'abri de l'incohérence. En effet, si $\alpha > inc(K)$, $(K_\alpha)^*$ est cohérent, et K^* cohérent $\Leftrightarrow$ $inc(K) = 0$.
La complexité de l'inférence en LPB reste similaire à celle de la logique classique [68].
Aspects sémantiques. La sémantique du LPB [41] s'exprime en termes de distributions de possibilité, et de mesures de nécessité sur l'ensemble Ω des interprétations ω du langage. La base K est sémantiquement associée à la distribution de possibilité, qui est un ensemble *flou* d'interprétations :

$$\pi_K(\omega) = \min_{i=1}^{m} \max([p_i](\omega), 1 - \alpha_i)$$

où $[p_i]$ est la fonction caractéristique des modèles de p_i, à savoir $[p_i](\omega) = 1$ si $\omega \vDash p_i$ et $[p_i](\omega) = 0$ sinon. Ceci est en accord avec la qualification en termes de certitude : Intuitivement, cela signifie que toute interprétation qui est un contre-modèle de p_i, est d'autant moins possible que p_i est plus certain ; π_K est obtenu comme la conjonction basée sur min des distributions de possibilité représentant chaque formule. Comme attendu, $N_K(p_i) \geq \alpha_i$ pour i=1,. . .,m, où N_K est défini à partir de π_K. L'implication sémantique est définie par $K \vDash (p, \alpha)$ ssi $\forall \omega, \pi_K(\omega) \leq \pi_{\{(p,\alpha)\}}(\omega)$. LPB est sain et complet [41] par rapport à cette sémantique :

$$K \vdash (p, \alpha) \text{ ssi } K \vDash (p, \alpha).$$

De plus, nous avons $inc(K) = 1 - \max_{\omega \in \Omega} \pi_K(\omega)$, qui reconnaît le fait que la normalisation de π_K est équivalente à la cohérence classique de K^*.
En probabilités, la seule utilisation de la règle de résolution (localement optimale) $Prob(\neg p \vee q) \geq \alpha, Prob(p \vee r) \geq \beta \vdash Prob(q \vee r) \geq \max(0, \alpha + \beta - 1)$, ne peut pas assurer la complétude d'une contrepartie probabiliste de LPB.

2.3 Forme matricielle

Une règle « si p alors q » est représentée plus naturellement en termes de conditionnement plutôt qu'en utilisant l'implication matérielle de la logique qui permet la contraposition. Le conditionnement en théorie des possibilités obéit à :

$$\Pi(p \wedge q) = \Pi(q \mid p) \star \Pi(p)$$

où $\star$ est min ou le produit, selon que l'on choisit d'être dans un cadre qualitatif ou quantitatif. [2] Pour $\star = \min$, la solution la plus grande et la moins restrictive de l'équation ci-dessus est $\Pi(q \mid p) = \Pi(p \wedge q)$ si $\Pi(p \wedge q) < \Pi(p)$, $\Pi(q \mid p) = 1$ sinon. Pour $\star =$ produit, le conditionnement (quantitatif) ressemble à un conditionnement probabiliste : $\Pi(q \mid p) = \frac{\Pi(p \wedge q)}{\Pi(p)}$ pour $\Pi(p) \neq 0$ et correspond à la règle de conditionnement de Dempster dans la théorie de Shafer [81]. La nécessité conditionnelle est définie par dualité : $N(q|p) = 1 - \Pi(\neg q|p)$.
En utilisant la possibilité conditionnelle qualitative, un calcul matriciel (voir [44][53] pour des études approfondies) peut être développé en utilisant le produit matriciel max-min $\otimes$ (en notant que $\Pi(q) = \max(\Pi(p \wedge q), \Pi(\neg p \wedge q))$) :
$\begin{bmatrix} \Pi(q) \\ \Pi(\neg q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi(q|p) & \Pi(q|\neg p) \\ \Pi(\neg q|p) & \Pi(\neg q|\neg p) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \Pi(p) \\ \Pi(\neg p) \end{bmatrix}$. $\otimes$ préserve la normalisation : $\forall r, \max(\Pi(r), \Pi(\neg r)) = 1$.
Un tel produit matriciel peut être appliqué à un ensemble de m règles incertaines en parallèle de la forme "si $a_i^1(x)$ est P_i^1 et $\cdots$ et $a_i^k(x)$ est P_i^k alors $b_i(x)$ est Q_i" ($i = 1, \cdots, m$) qui relie des variables appartenant aux valeurs d'attributs d'un élément x, et où les P_i^j et Q_i sont des sous-ensembles classiques dans les domaines d'attributs correspondants. Il a été montré que le résultat de leur application conjointe (incluant la fusion des résultats obtenus à partir de chaque règle) peut être mis sous la forme d'un produit matriciel min-max [53] ; voir [5] pour le cas général. Le résultat de ce produit min-max est une distribution de possibilité sur une collection d'alternatives mutuellement exclusives (induite par des conclusions pondérées sur les Q_i). De plus, la vision conditionnelle peut être étroitement liée à la LPB, puisque $N(q|p) = N(\neg p \vee q)$ si $N(q|p) > 0$.

2.4 Réseaux possibilistes

Comme pour les distributions de probabilité conjointes, une distribution de possibilité conjointe associée à des variables ordonnées $X_1, \ldots, X_n$ peut être décomposée en termes de distributions de possibilité conditionnelle à l'aide d'une règle de chaînage, en utilisant $\star = \min$, ou $\star =$ produit :

$$\pi(X_1,..., X_n) = \pi(X_n | X_1,..., X_{n-1}) \star .. \star \pi(X_2 | X_1) \star \pi(X_1)$$

De la même manière que pour les réseaux bayésiens, une forme d'indépendance permet de simplifier la décomposition. Cependant, il existe plusieurs définitions de l'indépendance possibiliste conditionnelle entre variables en théorie des possibilités qualitatives, l'une étant symétrique : $\Pi(x, y|z) = \min(\Pi(x|z), \Pi(y|z))$ et une autre, plus forte, étant asymétrique : $\Pi(x|z) = \Pi(x|z, y)$. Dans le cadre quantitatif, l'indépendance basée sur le produit entre variables ($\forall x, y, z$, $\Pi(x|y, z) = \Pi(x|z)$ où $\Pi(y, z) > 0$) est symétrique car elle est équivalente à $\forall x, y, z$, $\Pi(x, y|z) = \Pi(x|z) \cdot \Pi(y|z)$. Il existe des algorithmes efficaces pour l'inférence dans les réseaux possibilistes. [9], [69].
Les réseaux possibilistes et les bases LPB sont des représentations compactes des distributions de possibilité. Une caractéristique remarquable de ce cadre est que les réseaux possibilistes peuvent être directement traduits en bases LPB et vice-versa, que le conditionnement soit basé sur le minimum ou sur le produit [14].
Des formats de représentation hybrides ont été introduits où des bases en LPB sont associées localement aux nœuds d'une structure graphique plutôt que des tables de possibilités conditionnelles [31].
Ainsi, le cadre de la LPB offre de multiples formats de représentation équivalents : ensemble de formules logiques

2. Dans ce dernier cas, la possibilité et la nécessité peuvent être interprétées comme une probabilité supérieure et inférieure, voir, e.g., [53].

priorisées, réseaux possibilistes, mais aussi ensemble de conditionnels de la forme $\Pi(p \wedge q) > \Pi(p \wedge \neg q)$ ($\Leftrightarrow N(q|p) > 0$), tous sémantiquement équivalents à des préordres sur les interprétations (c'est-à-dire à des distributions de possibilité). Il existe des algorithmes permettant de traduire un format dans un autre [14].

Par ailleurs, les réseaux possibilistes ont été étudiés du point de vue du raisonnement causal, en utilisant le concept d'*intervention*, qui revient à imposer les valeurs de certaines variables afin de révéler leur influence sur d'autres [11].

2.5 Gestion des incohérences

Le niveau d'incohérence $inc(K)$ d'une base K en LPB fournit un outil pour gérer les incohérences. Cependant, la LPB souffre d'un « effet de noyade » puisque toutes les formules en dessous de $inc(K)$ sont perdues même si elles ne participent pas à une sous-base incohérente minimale. Il existe différentes manières d'élargir l'ensemble des conséquences qui peuvent être déduites de K [21].

Une façon de le faire tout en préservant un ensemble cohérent de conséquences est la suivante. Étant donnée une base K en LPB, on construit sa complétion paraconsistante K^o constituée de formules bi-pondérées : pour chaque formule (p, α) de K, on calcule un triplet (p, β, γ) où β (resp. γ) est le degré le plus élevé avec lequel p (resp. $\neg p$) est soutenu dans K (p est dit *soutenu* dans K *au moins au degré* β s'il existe une sous-base *cohérente* de $(K_\beta)^*$ qui prouve p).

Le sous-ensemble des formules de la forme $(p, \beta, 0)$ dans K^o ne sont pas paraconsistantes et conduisent à des conclusions sûres. Nous pouvons toujours obtenir un ensemble plus large de conclusions cohérentes à partir de K^o comme suit. Nous avons besoin de deux évaluations : i) le niveau d'*infaillibilité* d'un ensemble cohérent S de formules : $\mathrm{UD}(S) = \min\{\beta \mid (p, \beta, \gamma) \in K^o \text{ et } p \in S\}$; ii) le niveau d'*insécurité* d'un ensemble cohérent S de formules : $\mathrm{US}(S) = \max\{\gamma | (p, \beta, \gamma) \in K^o \text{ et } p \in S\}$. Alors une inférence $\vdash_{SS}$, nommée relation de conséquence *soutenue de manière sûre*, est définie par $K^o \vdash_{SS} q$ si et seulement $\exists$ un sous-ensemble minimal cohérent S qui implique classiquement q tel que $\mathrm{UD}(S) > \mathrm{US}(S)$. On peut montrer que l'ensemble $\{q \mid K^o \vdash_{SS} q\}$ est classiquement cohérent. Voir [49] pour les détails, les discussions et d'autres approches de la gestion de l'incohérence dans le cadre de la LPB, y compris la logique quasi-possibiliste où l'utilisation de la résolution après l'introduction d'une disjonction est interdite (pour éviter le *sequitur ex falso quodlibet*).

2.6 Logique possibiliste symbolique

Il peut y avoir plusieurs raisons pour gérer les niveaux de certitude des formules en LPB de manière *symbolique* : notamment pour garder une trace de l'impact de certains niveaux dans le calcul, ou parce que leur valeur est inconnue. Dans ce dernier cas, les valeurs des niveaux de certitude associés aux formules (toujours supposées appartenir à une échelle totalement ordonnée) sont inconnues, mais l'ordre relatif entre certaines d'entre elles peut être partiellement connu. Dans [29], cela est codé au moyen d'une logique propositionnelle typée, où les formules possibilistes sont des clauses avec des littéraux spéciaux qui font référence aux niveaux. Les contraintes sur l'ordre de certains des niveaux se traduisent en formules logiques du type correspondant et sont rassemblées dans une base de connaissances auxiliaire distincte. Le processus d'inférence est caractérisé par l'utilisation de « variables d'oubli » pour gérer les niveaux symboliques, et ainsi un processus d'inférence est obtenu au moyen d'une compilation en DNF des deux bases de connaissance [29].

Lorsque l'ordre des poids est complètement connu, ce codage offre un moyen de compiler une base de connaissance possibiliste afin de pouvoir en traiter l'inférence en temps polynomial [30].

Dans une approche [35] qui rejoint la précédente pour traiter les connaissances partielles sur la valeur relative des niveaux de certitude, deux méthodes d'inférence syntaxique sont proposées : l'une calcule le degré de nécessité d'une formule possibiliste en utilisant la notion de sous-base minimale incohérente, tandis que l'autre s'inspire des ATMS, en utilisant les nogoods et les labels.

2.7 Extensions de la logique possibiliste basées sur des treillis

Il existe plusieurs extensions de la logique possibiliste où les poids sont des niveaux de certitude combinés avec des ensembles tels que des périodes de temps [40], des ensembles de sources, ou des groupes d'agents [8, 54] qui conduisent à utiliser des structures de treillis distributif pseudo-complémenté. Lorsque les ensembles sont remplacés par un singleton unique (c'est-à-dire que nous considérons un instant, une source ou un agent), la logique possibiliste de base est retrouvée.

Nous prenons l'exemple de la logique possibiliste multi-agents pour expliquer l'idée. Les formules (propositionnelles) sont désormais associées à un sous-ensemble d'agents : chaque formule (p, A) signifie que *au moins tous* les agents de A croient que p est vrai. Une telle pondération booléenne introduit une différence notable : le supremum de deux sous-ensembles propres peut être l'univers entier (tandis que le supremum de deux niveaux non maximum n'est jamais le niveau maximum dans une échelle totalement ordonnée). C'est pourquoi la règle explicite de renforcement $(p, A), (p, B) \vdash (p, A \cup B)$ est nécessaire, au niveau syntaxique, à côté de règles d'inférence sur l'affaiblissement du sous-ensemble, le modus ponens et la résolution. Les théorèmes de correction et de complétude sont valides par rapport à une sémantique en termes de fonctions de possibilité et de nécessité à valeurs ensemblistes : $\boldsymbol{\Pi}(p) = \bigcup_{w \models p} \boldsymbol{\pi}(w)$ où $\boldsymbol{\pi}(w)$ est le sous-ensemble *maximal* des agents qui trouvent l'interprétation ω possible, et $\boldsymbol{N}(p) = [\boldsymbol{\Pi}(\neg p)]^c = \bigcap_{w \models \neg p} [\boldsymbol{\pi}(w)]^c$ (où ^{c} désigne la complémentation d'ensemble).

Nous avons maintenant deux types de normalisation conduisant à une vision plus riche de la / (l'in)cohérence : l'une qui signifie que chaque agent trouve au moins un ω possible ($\forall a, \exists \omega, a \in \boldsymbol{\pi}(\omega)$, c'est-à-dire qu'aucun agent n'est incohérent. Cette condition est plus faible que la condition $\exists \omega, \boldsymbol{\pi}(\omega) = All$ (*All* est l'ensemble de tous les agents), ce qui signifie qu'il existe une interprétation que tous les agents croient possible, exprimant une condition de cohérence collective. Par exemple, la base $K = \{(p, A), (\neg p, A^c)\}$ viole la dernière condition, mais pas la première.

Cela s'étend au cas général où les propositions sont à la fois associées à un niveau de certitude et à un ensemble d'agents. Les formules sont alors de la forme $(p, \alpha/A)$ où A est un sous-ensemble d'agents et $\alpha \in (0, 1]$, qui se lit « au moins tous les agents de A sont certains de p au moins au niveau α ». La sémantique est alors en termes de fonctions de possibilité et de nécessité floues : Le poids symbolique α/A représente un ensemble flou d'agents a avec des degrés d'appartenance α si l'agent $a \in A$, et 0 sinon.

Une logique de raisonnement sur les raisons [54] gère des paires de la forme (p, x) où p et x sont deux formules logiques propositionnelles exprimées dans deux langages distincts, p est appelé une affirmation et x une raison. La formule (p, x) se lit donc "x est une raison pour p". (p, x) est plus faible que $(\neg x \vee p, 1)$ (le premier n'entraîne pas le second). La vérité de (p, x) signifie que toutes les situations où x est vrai sont des raisons de croire p. La sémantique de cette logique est isomorphe à celle de la logique multi-agent précédente ; une extension peut prendre en compte la force des raisons [54]. Cette logique des raisons s'apparente à la logique des "supporters" [67], mais est un peu plus simple.

La logique possibiliste basée sur les intervalles [26, 28] est une autre extension basée sur un treillis de la logique possibiliste, où les valeurs possibles de niveaux de certitude mal connus sont restreintes par des intervalles.

Mentionnons enfin une manière de conserver une structure ordonnée linéairement tout en enrichissant l'échelle. En LPB, seul le plus petit poids des formules utilisées dans une preuve est conservé ; aucune différence n'est faite par exemple entre une preuve avec une seule prémisse faible et une preuve avec plusieurs prémisses faibles de même force. Cela peut être capturé en utilisant une nouvelle règle de résolution $(\neg p \vee q, \widetilde{\alpha})$; $(p \vee r, \widetilde{\beta}) \vdash (q \vee r, \widetilde{\alpha\beta})$ où $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont des listes de poids, et $\widetilde{\alpha\beta}$ est la liste obtenue par concaténation. Nous pouvons ensuite classer les preuves en fonction de leur force en utilisant un classement lexicographique des listes (une fois qu'elles ont été complétées par des 1 pour les rendre de longueur égale) ; ceci est décrit dans [52].

2.8 Logique possibiliste bipolaire

En théorie des possibilités, il existe deux autres fonctions d'ensemble : i) une mesure de *possibilité garantie* ou de possibilité *forte* (voir, par exemple, [48]) : $\Delta(A) = \inf_{u \in A} \pi(u)$ qui estime dans quelle mesure *tous* les états dans A sont possibles selon les observations. $\Delta(A)$ peut être utilisé comme un degré de support garanti pour A, et son dual $\nabla(A) = 1 - \Delta(A^c) = \sup_{u \notin A} 1 - \pi(u)$ évalue le degré de nécessité potentielle ou *faible* de A, car il vaut 1 dès qu'un état u hors de A est impossible. Les fonctions Δ et ∇ sont *décroissantes* par rapport à l'inclusion (en complet contraste avec Π et N qui sont croissantes). Elles satisfont les propriétés caractéristiques $\Delta(A \cup B) = \min(\Delta(A), \Delta(B))$ et $\nabla(A \cap B) = \max(\nabla(A), \nabla(B))$.

Ainsi la contrainte $\Delta(p) \geq \gamma$, notée syntaxiquement $[p, \gamma]$, exprime que tout modèle de p est au moins possible au degré γ. Ceci peut être représenté par l'ensemble flou $\delta_{[p,\gamma]}(\omega) = 0 \text{ if } \omega \models \neg p$, and $\delta_{[p,\gamma]}(\omega) = \gamma \text{ if } \omega \models p$. Un ensemble de contraintes $P = \{[q_j, \gamma_j] | j = 1, k\}$ est alors représenté par la distribution de possibilité $\delta_P(\omega) = \max_{j=1,k} \delta_{[q_j,\gamma_j]}(\omega)$ en cumulant les possibilités garanties. Notons que δ_P est obtenu comme la combinaison *disjonctive* basée sur le max de la représentation de chaque formule dans P. Ceci contraste avec π_K (dans la section 2.2) obtenu comme une combinaison *conjonctive* basée sur le min. Ainsi, une distribution de possibilité peut être représentée "par en haut" au moyen de contraintes basées sur la nécessité, et "par en bas" au moyen de contraintes basées sur la possibilité garantie. Au niveau syntaxique, les contraintes basées sur la nécessité sont naturellement associées à une décomposition en CNF pondérée, tandis que les contraintes basées sur Δ conduisent à une décomposition en DNF pondérée. Cette dernière est régie au niveau de l'inférence par le pendant suivant de la règle de résolution

$$[\neg p \wedge q, \gamma], [p \wedge r, \gamma']) \vdash [q \wedge r, \min(\gamma, \gamma')].$$

Une contrainte $[p, \gamma]$ basée sur Δ correspond naturellement à l'expression d'une information positive, c'est-à-dire que les interprétations qui sont des modèles de p sont possibles au moins au degré γ, tandis qu'une contrainte (p, α) basée sur N correspond à une expression négative indiquant que les contre-modèles de p sont quelque peu impossibles (leur possibilité est au plus $1 - \alpha$). Ainsi, plus d'informations positives augmentent δ_P en rendant plus d'interprétations réellement possibles, tandis que plus d'informations négatives diminuent π_K en restreignant davantage les mondes possibles [17].

On peut utiliser soit des formules basées sur Δ, soit des formules basées sur N pour représenter les informations disponibles, selon ce qui semble le plus pratique. Quand il est judicieux de faire la distinction entre les informations positives et les informations négatives (par exemple, des exemples réels de prix et des prix non-interdits par la réglementation), nous devons conserver séparément la base de connaissance K et la base de connaissance P, chacune sémantiquement associée à leurs distributions respectives (censées satisfaire la condition de cohérence $\delta_P \leq \pi_K$) ; voir [38], [18] pour des cadres de gestion de ce dernier cas.

2.9 Logique possibiliste généralisée

En LPB, seules les conjonctions de formules de logique possibiliste sont autorisées. Mais comme (p, α) est sémantiquement interprété comme $N(p) \geq \alpha$, une formule possibiliste peut être manipulée comme une formule propositionnelle qui est vraie (si $N(p) \geq \alpha$) ou fausse (si $N(p) < \alpha$). Les formules possibilistes peuvent alors être combinées avec tous les connecteurs propositionnels, y compris la disjonction et la négation. Il s'agit de la *logique possibiliste généralisée* (LPG) [57, 51]. La LPG est une logique propositionnelle à deux niveaux, dans laquelle les formules propositionnelles sont encapsulées par des opérateurs modaux pondérés interprétés en termes de mesures de nécessité et de possibilité.

La LPG utilise une échelle finie de degrés de certitude $\Lambda_k = \{0, \frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots, 1\}$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) ; $\Lambda_k^+ = \Lambda_k \setminus \{0\}$. Le langage de la LPG, $\mathcal{L}_{\mathbf{N}}^k$, est construit sur un langage propositionnel $\mathcal{L}$ comme suit : i) Si $p \in \mathcal{L}$, $\alpha \in \Lambda_k^+$, alors $\mathbf{N}_\alpha(p) \in \mathcal{L}_{\mathbf{N}}^k$; ii) si $\varphi \in \mathcal{L}_{\mathbf{N}}^k, \psi \in \mathcal{L}_{\mathbf{N}}^k$, alors $\neg\varphi$ et $\varphi \wedge \psi$ sont aussi dans $\mathcal{L}_{\mathbf{N}}^k$. Ici, $\mathbf{N}_\alpha(p)$ représente (p, α), la notation soulignant la proximité avec la logique modale. Ainsi, un agent affirmant $\mathbf{N}_\alpha(p)$ a un état épistémique tel que $N(p) \geq \alpha > 0$. Ainsi, $\neg\mathbf{N}_\alpha(p)$ signifie $N(p) < \alpha$, ce qui est équivalent à $N(p) \leq \alpha - \frac{1}{k}$ et donc $\Pi(\neg p) \geq 1 - \alpha + \frac{1}{k}$. En particulier, $\mathbf{\Pi}_1(p) \equiv \neg\mathbf{N}_{\frac{1}{k}}(\neg p)$ si $k > 1$. Ainsi, en LPG, on peut faire la distinction entre l'absence de certitude suffisante que p est vrai ($\neg\mathbf{N}_\alpha(p)$) et l'affirmation plus forte que p est quelque peu certainement faux ($\mathbf{N}_\alpha(\neg p)$).

La sémantique de la LPG est comme en LPB définie en termes de distributions de possibilité normalisées sur des interprétations propositionnelles, où les degrés de possibilité sont dans Λ_k. Toute distribution de possibilité à valeurs sur Λ_k telle que $N(p) \geq \alpha$ est un modèle d'une formule $\mathbf{N}_\alpha(p)$ de la LPG. Mais, l'ensemble des distributions de possibilité satisfaisant une formule de LPG n'a pas toujours un plus grand élément, comme c'était le cas en LPB.

La LPG peut être considérée comme un fragment de la logique modale KD, sans modalités imbriquées, mais les modalités y sont graduées. Voir [57] pour son axiomatique, les résultats de correction et complétude, et l'étude de sa complexité. La LPG est un puissant cadre unificateur pour divers formalismes de représentation des connaissances, y compris la logique possibiliste avec des formules partiellement ordonnées, ou une logique d'assertions conditionnelles. Le raisonnement sur l'ignorance explicite, ou certaines tâches de raisonnement sur plusieurs agents, telles que le problème des "enfants couverts de boue" ("muddy children"), peuvent également être traités en LPG [52].

De même, une logique possibiliste multi-agents généralisée qui permet la disjonction et la négation de ses formules de base a été récemment étudiée [54]. Une construction similaire s'applique également à la logique des raisons.

2.10 Relations avec d'autres cadres

Les fonctions de rang ("ranking functions") de Spohn [82] sont similaires aux mesures de possibilité mais elles sont évaluées sur des entiers positifs. Elles utilisent donc des échelles différentes pour évaluer la (im)plausibilité, ce qui rend leurs pouvoirs expressifs quelque peu différents. En effet, il n'y a pas de côté logique pour les fonctions de classement puisqu'il n'y a pas de contrepartie au modus ponens pondéré, et le conditionnement de Spohn, basé sur l'addition, s'inspire des probabilités infinitésimales, tandis que la logique possibiliste n'utilise que des opérations idempotentes telles que max et min [50].

La logique de Markov [78] utilise des formules pondérées pour encoder de manière compacte une distribution de probabilité, mais les pondérations ne sont pas faciles à interpréter. Cependant, on peut toujours construire une base logique possibiliste qui capture exactement un réseau logique de Markov ; voir [65], [57].

3 Applications

La logique possibiliste a trouvé des applications dans de nombreux domaines de recherche en IA. En raison de l'espace limité, nous n'avons pu sélectionner qu'un petit échantillon de références pour chaque application.

3.1 De la gestion de l'incertitude au raisonnement par défaut

La LPB a été conçue à l'origine pour propager l'incertitude dans des moteurs d'inférence pour les systèmes experts, en tirant parti du format matriciel [60].

La capacité de LPB à gérer l'incohérence, en utilisant le niveau d'incohérence d'une base de connaissances, est exploitée dans le raisonnement par défaut, une fois les règles par défaut traduites en formules possibilistes. Une règle par défaut "généralement, si p alors q"est représentée par la condition $\Pi(p \wedge q) > \Pi(p \wedge \neg q) \iff N(q|p) > 0$ Ainsi, $N(q|p) > 0$ exprime que dans le contexte où p est vrai, avoir q vrai est strictement plus possible que q faux. Comme pour les probabilités, ce conditionnement n'est pas monotone. On peut avoir que $N(q|p) > 0$, alors que la conclusion opposée $N(\neg q|p \wedge p') > 0$ est vraie dans le contexte plus restreint $p \wedge p'$.

Ensuite, à partir de la plus grande distribution de possibilité sous-jacente à un ensemble cohérent de défauts $\Pi(p_i \wedge q_i) > \Pi(p_i \wedge \neg q_i)$ pour $i = 1, n$, il est possible de stratifier l'ensemble des défauts selon leur spécificité (les défauts les plus spécifiques reçoivent les niveaux les plus élevés), puis de les coder par des formules de logique possibiliste [20] : chaque défaut est transformé en une clause possibiliste $(\neg a_i \vee b_i, N(\neg a_i \vee b_i))$, où N est calculé à partir de la plus grande distribution de possibilité induite par l'ensemble des contraintes modélisant la base de règles par défaut. Ce codage tire parti du fait que lorsque de nouvelles informations sûres sont reçues, le niveau d'incohérence de la base ne peut pas diminuer, et s'il augmente strictement, certaines inférences qui étaient sûres auparavant sont maintenant noyées dans le nouveau niveau d'incohérence de la base et ne sont donc plus possibles, d'où un mécanisme de conséquence non monotone. Il a été prouvé que cette approche est en plein accord avec une approche basée sur les postulats du raisonnement non monotone [19]. Cela est également équivalent à une modélisation probabiliste des conditionnelles en termes d'un type spécial de distributions de probabilités appelées probabilités à grandes marches [22].

3.2 Révision de croyances

Le raisonnement non monotone et la révision des croyances sont étroitement liés, de sorte que la LPB trouve également une application en révision des croyances. En effet, les relations de nécessité comparative (qui peuvent être codées par des mesures de nécessité) ne sont rien d'autre que les relations d'enracinement épistémique [46] qui sous-tendent les processus de révision des croyances bien conduits [61]. Cela permet au cadre de la LPB de fournir des opérateurs de révision syntaxique qui s'appliquent aux bases de connaissances possibilistes, y compris dans le cas d'entrées incertaines [24, 76]. En LPB, l'enracinement épistémique est rendu explicite par les niveaux de certitude des formules. En outre, dans un processus de révision, on s'attend à ce que toutes les formules indépendantes de la validité des informations d'entrée restent dans l'état révisé de croyance ; cette idée peut recevoir une signification précise en utilisant une définition de l'indépendance causale possibiliste entre les événements [37].

3.3 Fusion d'informations

La combinaison des distributions de possibilité peut être effectuée de manière équivalente en termes de bases de LPB : La contrepartie syntaxique de la combinaison point par point de deux distributions de possibilité π_1 et π_2 en une distribution $\pi_1 \circledast \pi_2$ par tout opérateur de combinaison monotone $\circledast$ tel que $1 \circledast 1 = 1$, peut être calculée, suivant une idée proposée pour la première fois dans [33]. A savoir, si la base LPB K_1 est associée à π_1 et la base K_2 à π_2, une base LPB $K_{1\circledast 2}$ sémantiquement équivalente à $\pi_1 \circledast \pi_2$ est donnée par : $\{(p_i, 1-(1-\alpha_i) \circledast 1)$ s.t. $(p_i, \alpha_i) \in K_1\} \cup \{(q_j, 1-1 \circledast (1-\beta_j))$ s.t. $(q_j, \beta_j) \in K_2\} \cup \{p_i \vee q_j, 1-(1-\alpha_i) \circledast (1-\beta_j))$ s.t. $(p_i, \alpha_i) \in K_1, (q_j, \beta_j) \in K_2\}$. Pour $\circledast = \min$, on obtient $K_{1\oplus 2} = K_1 \cup K_2$ avec $\pi_{K_1 \cup K_2} = \min(\pi_1, \pi_2)$ comme attendu (combinaison conjonctive). Pour $\circledast = \max$ (combinaison disjonctive), on a $\Gamma_{1\oplus 2} = \{(p_i \vee q_j, \min(\alpha_i, \beta_j))$ s.t. $(p_i, \alpha_i) \in K_1$, et $(q_j, \beta_j) \in K_2\}$. Avec des opérateurs $\oplus$ non idempotents, certains effets de renforcement peuvent être obtenus. Voir, par exemple [63], pour une étude sur les opérateurs de fusion en LPB. En outre, cette approche peut également être appliquée au codage syntaxique de la fusion de bases logiques *classiques* basées sur la distance de Hamming (où les distances sont calculées entre chaque interprétation et les différentes bases en logique classique, donnant ainsi naissance à des équivalents de distributions de possibilité) [15]. Dans [27] une représentation basée sur Δ est utilisée ; voir [32] pour un exemple illustratif.

3.4 Logique de description

La gestion possibiliste de l'incertitude en logique de description a été proposée pour la première fois dans [75]. Elle présente des avantages informatiques, en particulier dans le cas de la famille *possibilistic DL-Lite* où l'extension de la puissance expressive de DL-Lite se fait sans coûts de calcul supplémentaires [12] ; il est alors facile d'utiliser l'opération min pour la fusion de bases DL-Lite possibilistes.

Une méthode polynomiale pour calculer une réparation possibiliste unique pour une ABox pondérée partiellement pré-ordonnée qui peut être incohérente par rapport à la TBox a été proposée dans [7].

3.5 Programmation logique

Différentes propositions ont été faites pour une gestion possibiliste de l'incertitude en programmation logique et en programmation par ensembles-réponses [2, 71, 72, 62, 6].

En outre, une application remarquable de la LPG est sa capacité à coder des programmes par ensembles-réponses (ASP), en utilisant une échelle à 3 valeurs $\Lambda_2 = \{0, 1/2, 1\}$. Ce qui permet de faire la distinction entre les propositions dont on est totalement certain et les propositions qu'on considère seulement comme plausibles, et d'expliciter en LPG la sémantique épistémique de règles avec négation par échec. Par exemple, la règle ASP $r \leftarrow p \wedge \text{not}\, q$ est codée par $\mathbf{N}_1(p) \wedge \mathbf{\Pi}_1(\neg q) \to \mathbf{N}_1(r)$ en LPG. Voir [57].

3.6 Bases de données

Le calcul de *provenance*, basé sur deux opérations formant un demi-anneau, combine et propage des annotations associées à des données. Ce calcul, lorsqu'il est basé sur les opérations max et min, correspond exactement à l'évaluation des requêtes lorsque les données sont étiquetées avec des niveaux de certitude, comme en LPB [55].

La LPB présente un intérêt pour la conception de bases de données où la présence de certains tuples dans la base de données peut n'être possible que dans une certaine mesure, et où les dépendances fonctionnelles sont incertaines [70]. Le même genre d'idée a été appliqué au nettoyage possibiliste de données [64].

3.7 Préférences et décision qualitative

Une formule de LPB (p, α) peut représenter un objectif p avec un niveau de priorité α. Des préférences telles que "Je préfère p à q et q à r" (où p, q, r peuvent ne pas être mutuellement exclusifs) peuvent être représentées par la base possibiliste $P = \{(p \vee q \vee r, 1), (p \vee q, 1-\gamma), (p, 1-\beta)\}$ avec $\gamma < \beta < 1$, comme un ensemble d'objectifs plus ou moins impératifs. D'autres formats tels que les conditionnels, les réseaux possibilistes, la représentation basée sur Δ sont également intéressants pour représenter les préférences [23]. De plus, l'expression des préférences peut être bipolaire : énoncé de situations qui sont plus ou moins fortement rejetées, et de situations qui sont garanties satisfaisantes à un certain degré [16]. Mentionnons l'équivalence représentationnelle [13] entre la logique de choix qualitatif QCL [34] et la logique des possibilités garanties. De telles préférences sont également intéressantes pour l'expression de requêtes flexibles à une base de données [58].

Les réseaux possibilistes (basés sur le produit) ont été utilisés pour représenter des préférences conditionnelles possibilistes avec des pondérations symboliques [10]. Les interprétations (correspondant aux différentes alternatives) sont alors comparées en termes de vecteurs symboliques exprimant la satisfaction ou la violation des formules associées aux différentes préférences, en utilisant des relations d'ordre appropriées. La représentation obtenue est compatible avec celle des CP-nets, dont elle fournit une bonne approximation [83].

La théorie des possibilités fournit un cadre pour la décision qualitative sous incertitude où des critères de décision pessimistes et optimistes ont été axiomatisés [56]. La contrepartie de ces critères, lorsque la connaissance et les préférences sont sous la forme de *deux bases en LPB distinctes*, est donnée par les définitions [42] :

- l'utilité pessimiste $u_*(d)$ de la décision d est le maximum $\alpha \in \mathcal{S}$ s.t. $K_\alpha \wedge d \vdash_{PL} P_{\underline{\nu(\alpha)}}$,

- l'utilité optimiste $u^*(d)$ de d est le maximum $\nu(\alpha) \in \mathcal{S}$ s.t. $K_{\underline{\alpha}} \wedge d \wedge P_{\underline{\alpha}} \not\equiv \perp$,
où $\mathcal{S}$ est une échelle totalement ordonnée finie bornée, ν une bijection inversant l'ordre de cette échelle ; K_α est un ensemble de formules logiques classiques rassemblant les connaissances certaines à un niveau au moins α, et où $P_{\underline{\beta}}$ est un ensemble de formules logiques classiques constitué d'un ensemble d'objectifs dont le niveau de priorité est *strictement* supérieur à β. Une décision pessimiste optimale assure la satisfaction de tous les objectifs de $P_{\underline{\nu(\alpha)}}$ avec une priorité aussi basse que possible, en utilisant seulement une partie K_α de la connaissance qui a une grande certitude. Une décision optimiste optimale maximise la cohérence de tous les objectifs plus ou moins importants avec tous les éléments de connaissance plus ou moins certains.

3.8 Argumentation

Un langage de programmation logique possibiliste et réfutable qui combine des caractéristiques de la théorie de l'argumentation et de la programmation logique, intégrant également le traitement possibiliste de l'incertitude, a été proposé dans [1].
La logique possibiliste peut être utilisée pour représenter les états mentaux des agents (croyances éventuellement imprégnées d'incertitude et objectifs prioritaires), pour réviser les bases de croyances et pour décrire la procédure de décision pour sélectionner une nouvelle offre dans une négociation basée sur l'argumentation [3].
La logique des raisons [54] qui traite les formules (p, x) exprimant que "x est une raison pour p", où la négation peut être appliquée à p, x et (p, x), offre un cadre riche pour le raisonnement argumentatif.

3.9 Apprentissage automatique

L'étude de l'apprentissage des théories logiques possibilistes [73], a montré que de nombreux résultats d'apprentissage en temps polynomial pour la logique classique peuvent être transférés à l'extension possibiliste respective. La logique possibiliste bipolaire offre un cadre gradué pour étendre le cadre d'apprentissage de l'espace des versions [74].
La LPB peut également être appliquée à la programmation logique inductive (ILP). En effet, avoir un ensemble stratifié de règles logiques du premier ordre comme hypothèses en ILP est intéressant pour l'apprentissage à la fois de règles couvrant les cas normaux et de règles plus spécifiques pour les cas exceptionnels [79], [66].
Une cascade de produits min-max de matrices représentant des règles possibilistes de type si-alors présente une ressemblance structurelle avec un réseau neuronal min-max. Une telle cascade peut être montrée comme étant équivalente à un réseau neuronal min-max, chaque produit matriciel correspondant à une couche et la fonction d'activation utilisée étant l'identité ;voir [5] pour plus de détails.[4] offre une approche neuro-symbolique possibiliste très complète.

3.10 Autres applications

D'autres applications peuvent être trouvées, comme la modélisation des désirs à l'aide de fonctions Δ [43], ou l'expression des buts des agents en logique possibiliste dans des jeux booléens lorsque les agents peuvent avoir une connaissance incomplète des préférences des autres [36].
Une autre application est le codage des politiques d'accès de contrôle [25]. Une description formelle des politiques de sécurité est nécessaire pour vérifier si les propriétés de sécurité sont satisfaites ou non. Les règles de contrôle d'accès, garantissant les propriétés de confidentialité et d'intégrité, sont codées en termes de bases de connaissances stratifiées. La stratification reflète la hiérarchie entre les rôles et est utile pour gérer les conflits.

4 Conclusion

Cet article a passé en revue un grand nombre de travaux sur le développement de la logique possibiliste et ses applications. La logique possibiliste est bien adaptée à la représentation d'informations incomplètes et de croyances acceptées plus ou moins ancrées. Elle reste proche de la logique classique et offre un cadre riche, simple et polyvalent pour la représentation de l'information et le raisonnement qualitatif sur l'incertitude. La théorie des possibilité, comme celle des probabilités, mérite qu'on s'y intéresse !

Références

[1] T. Alsinet, C. I. Chesñevar, L. Godo, and G. R. Simari. A logic programming framework for possibilistic argumentation : Formalization and logical properties. *Fuzzy Sets Syst.*, 159 :1208–1228, 2008.

[2] T.Alsinet,L.Godo, andS.SandriTwo formalisms of extended possibilistic logic programming with context-dependent fuzzy unification : A comparative description.*Elec. Notes in Theo. Comput. Sci.*, 66 (5), 2002.

[3] L. Amgoud and H. Prade. Reaching agreement through argumentation : A possibilistic approach. In *KR*, pages 175–182, 2004.

[4] I. Baaj and P. Marquis. Π-NeSy: A possibilistic neuro-symbolic approach. cs.AI arXiv 2504.07055, 2025.

[5] I. Baaj, J. P. Poli, W. Ouerdane, and N. Maudet. Min-max inference for possibilistic rule-based system. In *FUZZ-IEEE*, pages 1–6. IEEE, 2021.

[6] K. Bauters, S. Schockaert, M. De Cock, and D. Vermeir. Characterizing and extending answer set semantics using possibility theory. *Theory Pract. Log. Program.*, 15(1) :79–116, 2015.

[7] S. Belabbes and S. Benferhat. Computing a possibility theory repair for partially preordered inconsistent ontologies. *IEEETrans. Fuz. Syst.*, 30:3237–3246, 2022.

[8] A. Belhadi, D. Dubois, F. Khellaf-Haned, and H. Prade. Reasoning with multiple-agent possibilistic logic. In*SUM*, LNCS 9858,67-80. Springer, 2016.

[9] N. Ben Amor, S. Benferhat, and K. Mellouli. Anytime propagation algorithm for min-based possibilistic graphs. *Soft Comput.*, 8 :150–161, 2003.

[10] N. Ben Amor, D. Dubois, H. Gouider, and H. Prade. Possibilistic preference networks. *Inf. Sci.*, 460-461 :401–415, 2018.

[11] S. Benferhat. Interventions and belief change in possibilistic graphical models. *Artif. Intell.*, 174(2) :177–189, 2010.

[12] S. Benferhat, Z. Bouraoui, and Z. Loukil. Min-based fusion of possibilistic DL-Lite knowledge bases. *Proc. IEEE/WIC/ACM Int. Conf. on Web Intelligence (WI'13)*, Atlanta, 23-28. 2013.

[13] S. Benferhat, G. Brewka, and D. Le Berre. On the relation between qualitative choice logic and possibilistic logic. In *IPMU vol.2*, pages 951–957, 2004.

[14] S. Benferhat, D. Dubois, L. Garcia, and H. Prade. On the transformation between possibilistic logic bases and possibilistic causal networks. *Int. J. Approx. Reas.*, 29 :135–173, 2002.

[15] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Possibilistic merging and distance-based fusion of propositional information*Ann. Math. A I*, 34 :217–252, 2002.

[16] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Bipolar possibility theory in preference modeling : Representation, fusion and optimal solutions. *Inf. Fusion*, 7 :135–150, 2006.

[17] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Modeling positive and negative information in possibility theory.*Int. J. Intel. Syst.*,23 :1094–1118, 2008.

[18] S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Bipolar possibilistic representationsProc.UAI,45-52,2002.

[19] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Nonmonotonic reasoning, conditional objects and possibility theory. *Artif. Intell.*, 92 :259–276, 1997.

[20] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Practical handling of exception-tainted rules and independence information in possibilistic logic. *Appl. Intell.*, 9(2) :101–127, 1998.

[21] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. An overview of inconsistency-tolerant inferences in prioritized knowledge bases. In *Fuzzy Sets, Logic and Reasoning about Knowledge*. 395-417, Kluwer, 1999.

[22] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. *J. Log. Comput.*, 9 :873–895, 1999.

[23] S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. Towards a possibilistic logic handling of preferences. *Appl. Intell.*, 14(3) :303–317, 2001.

[24] S. Benferhat, D. Dubois, H. Prade, and M.-A. Williams. A framework for iterated belief revision using possibilistic counterparts to Jeffrey's rule. *Fundam. Inform.*, 99(2) :147–168, 2010.

[25] S. Benferhat, R. El Baida, and F. Cuppens. A possibilistic logic encoding of access control. In *FLAIRS Conf.*, pages 481–485, 2003.

[26] S. Benferhat, J. Hué, Sylvain Lagrue, and J. Rossit. Interval-based possibilistic logic. In *IJCAI*, pages 750–755, 2011.

[27] S. Benferhat and S. Kaci. Logical representation and fusion of prioritized information based on guaranteed possibility measures : Application to the distance-based merging of classical bases. *Artif. Intell.*, 148(1-2) :291–333, 2003.

[28] S. Benferhat, A. Levray, K. Tabia, and V. Kreinovich. Compatible-based conditioning in interval-based possibilistic logic. In *IJCAI, 2777-2783*, 2015.

[29] S. Benferhat and H. Prade. Encoding formulas with partially constrained weights in a possibilistic-like many-sorted propositional logic. *Proc. 9th IJCAI*, Edinburgh, 1281-1286. 2005.

[30] S. Benferhat and H. Prade. Compiling possibilistic knowledge bases. *ECAI*, 337-341, IOS Press, 2006.

[31] S. Benferhat and S. Smaoui. Hybrid possibilistic networks. *Int. J. Approx. Reason.*, 44(3) :224–243, 2007.

[32] S. Benferhat and C. Sossai. Reasoning with multiple-source information in a possibilistic logic framework. *Inf. Fusion*, 7(1) :80–96, 2006.

[33] L. Boldrin and C. Sossai.Local possibilistic logic. *J. of Applied Non-Classical Logics*, 7(3) :309–333, 1997.

[34] G. Brewka, S. Benferhat, and D. Le Berre. Qualitative choice logic. *Artif. Intel.*, 157 :203–237, 2004.

[35] C. Cayrol, D. Dubois, and F. Touazi. Symbolic possibilistic logic : completeness and inference methods. *J. Log. Comput.*, 28(1) :219–244, 2018.

[36] S. De Clercq, S. Schockaert, A. Nowé, and M. De Cock. Modelling incomplete information in Boolean games using possibilistic logic. *Int. J. Approx. Reason.*, 93 :1–23, 2018.

[37] D. Dubois, L. Fariñas del Cerro, A. Herzig, and H. Prade. A roadmap of qualitative independence. In *Fuzzy Sets, Logics and Reasoning about Knowledge*, pages 325–350. Kluwer, 1999.

[38] D. Dubois, P. Hajek, and H. Prade. Knowledge-driven versus data-driven logics. *J. Logic, Language, and Information*, 9 :65–89, 2000.

[39] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Theorem proving under uncertainty - A possibility theory-based approach. In *IJCAI*, pages 984–986, 1987.

[40] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Timed possibilistic logic. *Fund. Infor.*, 15 :211–234, 1991.

[41] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming 3*. 439-513, OUP, 1994.

[42] D. Dubois, D. Le Berre, H. Prade, and R. Sabbadin. Using possibilistic logic for modeling qualitative decision : ATMS-based algorithms. *Fundamenta Informaticae*, 37 :1–30, 1999.

[43] D.Dubois, E.Lorini, and H.Prade.The strength of desires:A logical approach*MindsMach.*,27:199–231, 2017.

[44] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic under matrix form. In *Fuzzy Logic in Knowledge Engineering*. Verlag TÜV Rheinland, 112-126, 1986.

[45] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, 1988.

[46] D. Dubois and H. Prade. Epistemic entrenchment and possibilistic logic. *Artif. Intell.*, 50 :223–239, 1991.

[47] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy Sets Syst.*, 144(1) :3–23, 2004.

[48] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic - an overview. In *Computational Logic*, Handbook of the History of Logic,9. 283-342, Elsevier, 2014.

[49] D. Dubois and H. Prade. Inconsistency management from the standpoint of possibilistic logic. *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 23(Supp.-1) :15–30, 2015.

[50] D. Dubois and H. Prade. Qualitative and semi-quantitative modeling of uncertain knowledge - A discussion. In *Computational Models of Rationality*, pages 280–296. College Publications, 2016.

[51] D. Dubois and H. Prade. A crash course on generalized possibilistic logic. In *SUM*, volume 11142 of *LNCS*, pages 3–17. Springer, 2018.

[52] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic logic : From certainty-qualified statements to two-tiered logics - A prospective survey. In *JELIA*, volume 11468 of *LNCS*, pages 3–20. Springer, 2019.

[53] D. Dubois and H. Prade. From possibilistic rule-based systems to machine learning - A discussion paper. *SUM*, LNCS 12322,35-51, Springer. 2020.

[54] D. Dubois and H. Prade. Boolean weighting in possibilistic logic. In *SUM*, volume 15350 of *LNCS*, pages 130–146. Springer, 2024.

[55] D. Dubois and H. Prade. Possibilistic provenance. In *SUM*, LNCS 15350, 147-153. Springer, 2024.

[56] D. Dubois, H. Prade, and R. Sabbadin. Decision-theoretic foundations of qualitative possibility theory. *Europ. J. of Operat. Research*, 128 :459–478, 2001.

[57] D. Dubois, H. Prade, and S. Schockaert. Generalized possibilistic logic : Foundations and applications to qualitative reasoning about uncertainty. *Artif. Intell.*, 252 :139–174, 2017.

[58] D. Dubois, H. Prade, and F. Touazi. A possibilistic logic approach to conditional preference queries. In *Proc. FQAS*. LNCS 8132, 376-388, Springer, 2013.

[59] H. Farreny and H. Prade. Default and inexact reasoning with possibility degrees. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 16(2) :270–276, 1986.

[60] H. Farreny, H. Prade, and E. Wyss. Approximate reasoning in a rule-based expert system using possibility theory A case study. *IFIP Cong.*, 407-414. 1986.

[61] P. Gärdenfors. *Knowledge in Flux*. MIT Press, 1988.

[62] J. Hué, M. Westphal, and S. Wölfl. Towards a new semantics for possibilistic answer sets. In *KI*, LNCS, 8736, pages 159–170. Springer, 2014.

[63] S. Kaci, S. Benferhat, D. Dubois, and H. Prade. A principled analysis of merging operations in possibilistic logic. In *UAI'00*, pages 24–31, 2000.

[64] H. Koehler and S. Link. Possibilistic data cleaning. *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, 34 :5939–5950, 2022.

[65] O. Kuzelka, J. Davis, and S. Schockaert. Encoding Markov logic networks in possibilistic logic. In *UAI Conf.*, pages 454–463, 2015.

[66] O. Kuzelka, J. Davis, and S. Schockaert. Induction of interpretable possibilistic logic theories from relational data. In *IJCAI*, pages 1153–1159, 2017.

[67] C. Lafage, J. Lang, and R. Sabbadin. A logic of supporters. In *Information, Uncertainty and Fusion*, pages 381–392. Kluwer, 1999.

[68] J. Lang. Possibilistic logic : complexity and algorithms. In *Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning*, pages 179–220. Kluwer, 2001.

[69] A. Levray, S. Benferhat, and K. Tabia. Possibilistic networks : Computational analysis of MAP and MPE inference.*Int. J. Artif. Intel. Tools*, 29 :1–28, 2020.

[70] S. Link and H. Prade. Relational database schema design for uncertain data. *Inf. Syst.*, 84 :88–110, 2019.

[71] P. Nicolas, L. Garcia, I. Stéphan, and C. Lefèvre. Possibilistic uncertainty handling for answer set programming.*A. Math. Artif. Intell.*, 47 :139–181, 2006.

[72] J. C. Nieves, M. Osorio, and U. Cortés. Semantics for possibilistic disjunctive programs. In *LPNMR*, LNCS 4483. 315-320, Springer, 2007.

[73] C. Persia and A. Ozaki. On the learnability of possibilistic theories. In *IJCAI,1870-1876*, 2020.

[74] H. Prade and M. Serrurier. Bipolar version space learning. *Int. J. Intel. Syst.*, 23(10) :1135–1152, 2008.

[75] G.l. Qi, J. Z. Pan, and Q. Ji. Extending description logics with uncertainty reasoning in possibilistic logic. In *ECSQARU*, LNCS 4724 828-839. Springer, 2007.

[76] G.l. Qi and K.w. Wang. Conflict-based belief revision operators in possibilistic logic. AAAI, 800-806, 2012.

[77] N. Rescher. *Plausible Reasoning*. Van Gorcum, 1976.

[78] M. Richardson and P. M. Domingos. Markov logic networks. *Machine Learning*, 62 :107–136, 2006.

[79] M. Serrurier and H. Prade. Introducing possibilistic logic in ILP for dealing with exceptions. *Artificial Intelligence*, 171 :939–950, 2007.

[80] G. L. S. Shackle. *Expectation in Economics*. Cambridge University Press, 1949.

[81] G. Shafer. *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.

[82] W. Spohn. *The Laws of Belief : Ranking Theory and Its Philosophical Applications*. Oxford Univ. P., 2012.

[83] N. Wilson, D. Dubois, and H. Prade. CP-nets, π-pref nets, and Pareto dominance. In *SUM*, volume LNCS 11940, pages 169–183. Springer, 2019.

[84] L. A. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Syst.*, 1(1) :3–28, 1978.