Complexité des stratégies maxmin pures dans les jeux sous forme extensive à deux joueurs*

Junkang Li[1,2], Bruno Zanuttini[2], Véronique Ventos[1]

[1] NukkAI, Paris, France
[2] Université Caen Normandie, ENSICAEN, CNRS, Normandie Univ, GREYC UMR6072, F-14000 Caen, France

junkang.li@nukk.ai, bruno.zanuttini@unicaen.fr, vventos@nukk.ai

Résumé

Nous nous intéressons au calcul des stratégies pures et robustes pour les jeux sous forme extensive. Pour ce problème, nous avons effectué une analyse complète de sa complexité en fonction du degré d'information imparfaite des joueurs, et la même analyse sous trois cadres orthogonaux : les jeux représentés explicitement par leur arbre de jeu ; les jeux représentés de façon compacte par leurs règles ; les jeux dans lesquels le choix de stratégie des adversaires est restreint à un ensemble connu de modèles d'opposants.

Mots-clés

Théorie des jeux, complexité algorithmique, système multi-agents.

1 Jeux sous forme extensive

Les jeux sous forme extensive (*extensive-form games*, ou EFGs ci-après) représentent une interaction séquentielle entre plusieurs agents. Un EFG est défini par un arbre muni d'informations supplémentaires, comme le propriétaire des nœuds internes ou la récompense pour chaque joueur aux feuilles. Un tel jeu commence à la racine de son arbre, et se poursuit ainsi : pour chaque nœud interne, son propriétaire choisit un enfant de ce nœud, ce jusqu'à ce qu'une feuille soit atteinte ; chaque joueur reçoit alors une récompense en fonction de la feuille atteinte. Dans un EFG, une *stratégie pure* d'un joueur est une application qui associe chacun de ses nœuds à un enfant de ce nœud.

Il se peut aussi qu'un joueur dans un jeu ne possède pas d'information parfaite. Par exemple, un joueur peut ne pas observer tous les choix effectués par les autres joueurs dans le passé. Ce joueur peut alors ignorer où il est dans l'arbre lorsqu'il doit prendre une décision. Une telle situation se modélise en partitionnant les nœuds d'un joueur en des *ensembles d'information*, et en imposant que ce joueur doive prendre la même action à tous les nœuds dans le même ensemble d'information. Intuitivement, pendant le déroulement d'un tel jeu, lorsqu'un joueur doit choisir une action, il est seulement informé de l'ensemble d'information auquel le nœud courant appartient, mais pas du nœud lui-même. Si les ensembles d'information d'un joueur sont tous des singletons, on dit que ce joueur a une *information parfaite* ; sinon, il a une *information imparfaite*. Strictement entre ces deux notions se situe la notion nommée *mémoire parfaite* (*perfect recall*), qui signifie intuitivement qu'un joueur se souvient toujours des informations qu'il a reçues.

Il est également possible de modéliser explicitement les facteurs de hasard dans un EFG, en attribuant certains nœuds internes à un joueur spécial dénommé *Nature*. À chacun de ses nœuds (nommés *nœuds de hasard*), Nature choisira un successeur de façon probabiliste, selon une distribution de probabilités connue de tous les joueurs du jeu. Selon l'existence ou non de nœuds de hasard, un jeu est appelé un *jeu de hasard* ou un *jeu sans hasard*.

2 Cadre du travail

Nous nous focalisons sur les EFGs à deux joueurs, dénommés respectivement MAX et MIN. Cette étude concerne la valeur *maxmin pure*, c'est-à-dire la plus grande récompense dont MAX peut s'assurer en jouant l'une de ses stratégies pures, peu importe ce que fera MIN. Maxmin est donc une notion de robustesse. Notre travail consiste à établir la complexité de trouver une borne inférieure de la valeur maxmin pure pour les EFGs ; on nomme le problème de décision associé PURE MAXMIN.

Nos contributions principales sont les suivantes. (i) Nous avons établi la complexité de PURE MAXMIN sous trois cadres orthogonaux : les jeux représentés explicitement par leur arbre de jeu ; les jeux représentés de façon compacte par leurs règles de jeu ; les jeux dans lesquels le choix de stratégie des adversaires est restreint à un ensemble connu de modèles d'opposants. (ii) Nous avons rassemblé des résultats éparpillés à travers la littérature et complété les trous parmi eux. (iii) Nous présentons tous les résultats d'une manière cohérente, avec des preuves rigoureuses et des références appropriées. (iv) Dès que possible, nous avons renforcé les résultats existants ou simplifié leur preuve.

3 Complexité des EFGs explicites

Nous commençons par les EFGs dont l'arbre de jeu est explicitement donné comme entrée. Autrement dit, la com-

*Cet article est un résumé étendu en français de [1].

plexité se mesure par rapport à la taille de cet arbre. La complexité varie en fonction des caractéristiques du jeu, comme l'existence de hasard ou le degré d'information des joueurs. Pour ce dernier, nous considérons trois cas : information parfaite (IP), mémoire parfaite (MP) et mémoire parfaite multi-agents (MP-MA). MP-MA veut dire qu'un joueur est une équipe de plusieurs agents partageant le même gain et ayant chacun une mémoire parfaite ; les agents n'observent pas nécessairement les choix de leurs coéquipiers.

La complexité de PURE MAXMIN est présentée dans la Table 1 ; ceux en caractère gras sont nouveaux. Dans ce tableau, la complexité est croissante en les deux dimensions ; on constate aussi que conformément à notre intuition, le fait d'être multi-agents rend un jeu plus difficile à résoudre.

Pour prouver ces résultats, nous avons utilisé des réductions minimales, en ce sens qu'elles impliquent au plus deux agents de chaque équipe (MAX et MIN), le moins de tours possible et seulement des récompenses booléennes.

	Sans hasard	Avec hasard		
MAX \ MIN	IP/MP/MP-MA	IP	MP	MP-MA
IP	P	P	**NP-c**	**Σ_2^{P}-c**
MP	P	NP-c	NP-c	**Σ_2^{P}-c**
MP-MA	NP-c	NP-c	NP-c	Σ_2^{P}-c

TABLE 1 – Complexité de PURE MAXMIN.

4 Complexité des jeux représentés de façon compacte

Nous étudions ensuite la complexité des jeux représentés de façon compacte. La motivation est naturelle : les jeux de table auxquels on joue sont rarement définis explicitement par leur arbre de jeu, mais le sont plutôt par leurs *règles* et par quelques paramètres décrivant la taille du jeu. Par exemple, le jeu de go est défini par ses règles et par la taille du goban (traditionnellement de taille 19×19, mais possiblement d'autres dimensions) ; le jeu du bridge est défini par ses règles et par le nombre de couleurs et de rangs (normalement 4 couleurs, chacune avec 13 rangs). Ainsi, pour ces jeux, ce sont ces paramètres, plutôt que la taille de leur arbre de jeu, qui sont pertinents pour analyser la complexité.

Pour modéliser les jeux représentés de façon compacte, nous proposons deux formalismes diamétralement opposés.

— Le premier, que nous nommons *jeu booléen compact* (CBG ci-après), est une généralisation des formules booléennes quantifiées (avec ou sans dépendances ; QBF ci-après). Les QBF sont bien connues dans la littérature ; elles encodent de façon compacte des EFGs à information parfaite et sans hasard. Nous proposons le formalisme CBG pour généraliser QBF de façon minimale, tout en autorisant des facteurs de hasard et des équipes multi-agents.

— En revanche, le second, que nous nommons *jeu avec oracles* (OG ci-après), est très générique et permet de capturer les jeux qui se jouent en espace polynomial et avec un horizon polynomial, ce qui correspond à la plupart des jeux de table.

Il est facilement vérifiable qu'OG est effectivement plus expressif que CBG. Pour chaque classe de complexité, nous montrons le résultat de difficulté pour CBG et le résultat d'appartenance pour OG, ce qui nous permet de confirmer :

— que ces deux formalismes (et donc également tous les formalismes intermédiaires) sont équivalents en termes de complexité (à des transformations polynomiales près) ;

— que la notion de complexité utilisée est robuste au formalisme utilisé pour les jeux représentés de façon compacte, et donc qu'elle représente bien la difficulté intrinsèque de ces jeux, indépendamment de la représentation choisie.

Sans surprise, PURE MAXMIN est exponentiellement plus difficile lorsqu'un jeu est défini de façon compacte plutôt que par son arbre de jeu. Concrètement, les problèmes inclus dans P dans la Table 1 deviennent PSPACE-complets ; ceux qui sont NP-complets deviennent NEXP-complets ; ceux qui sont Σ_2^{P}-complets deviennent $\mathsf{NEXP}^{\mathsf{NP}}$-complets.

5 Complexité contre des OMs

Nous considérons aussi le cas où MIN choisit sa stratégie dans un ensemble restreint et connu par MAX. Ces stratégies de MIN sont appelées *modèles d'opposants* (OM ci-après) dans la littérature ; cette notion d'OM permet de simuler les situations dans lesquelles MAX connaît (parfaitement ou partiellement) la procédure de raisonnement de MIN. Les résultats sont présentés dans la Table 2, où les colonnes correspondent au nombre d'OM connus par MAX.

MAX \ #OM	1	Constante (≥ 2)	Non majoré
Sans hasard			
IP	P	P	P
MP	P	P	**P**
MP-MA	P	**P**	NP-c
Avec hasard			
IP	P	**NP-c**	**NP-c**
MP	P	**NP-c**	NP-c
MP-MA	NP-c	NP-c	NP-c

TABLE 2 – Complexité de PURE OM-MAXMIN.

6 Autres résultats

Nous terminons le travail en étudiant la complexité des problèmes liés au calcul d'une borne supérieure ou de la valeur exacte de la valeur maxmin pure. Il s'avère que la complexité de ces problèmes est intimement liée aux résultats dans la Table 1.

Références

[1] Junkang Li, Bruno Zanuttini, and Véronique Ventos. The complexity of pure maxmin strategies in two-player extensive-form games. *J. Artif. Intell. Res.*, 82 :241–284, 2025.