L'analogie numérique revisitée et étendue, précisée, rétrécie ou agrandie

Yves Lepage[1] **Miguel Couceiro**[2]

[1] IPS, université Waseda, Japon
[2] INESC-ID, IST, Universidade de Lisboa, Portugal
yves.lepage@waseda.jp
miguel.j.couceiro@tecnico.ulisboa.pt

Résumé

Le lien entre analogie et moyennes généralisées a récemment été établi. Nous *revisitons* ce lien avec des moyens algébriques, ce qui conduit à *étendre* l'ensemble support des analogies pour inclure le cas où l'un au moins des termes de l'analogie est égal à zéro. Nous *précisons* l'algorithme dichotomique de calcul des puissances analogiques et donnons les bornes pour son initialisation. Enfin, nous montrons comment la visualisation des analogies comme sortes de carrés pousse à créer d'autres analogies par *rétrécissement* ou *agrandissement.*

Abstract

The link between analogies and generalised means has recently been established. We re-explain this link from an algebraic point of view, which leads us to extend the support set of analogies, including the case where at least one of the terms of the analogy is zero. We give more details on the dichotomic algorithm for the computation of analogical powers, and provide bounds for its initialisation. Finally, the visualization of analogies as kinds of squares naturally leads to the creation of other analogies by shrinking or enlarging.

1 Introduction

L'analogie est une faculté cognitive fondamentale à l'œuvre dans la métaphore (l'atome est comme un système solaire) ou la comparaison (les nageoires sont au poisson ce que les ailes sont à l'oiseau). Afin d'équiper les modèles génératifs de cette faculté, il est nécessaire de mettre au clair des outils mathématiques précis applicables à des espaces de représentations numériques.

La lecture de maints travaux récents sur l'analogie [9, 14, 3] incite à conclure que trois propriétés la caractérisent :

— la réflexivité de la conformité
($a : b :: a : b$ toujours vrai) ;
— la symétrie de la conformité
($a : b :: c : d \Leftrightarrow c : d :: a : b$) ;
— et l'échange des moyens (lat. *permutando*)
($a : b :: c : d \Leftrightarrow a : c :: b : d$) [1].

Les deux premières caractérisent le symbole :: comme relation de ressemblance [19]. [2] La dernière est intrinsèque de l'analogie selon les Anciens [5, 4]. L'application successive des deux dernières implique huit formes équivalentes pour une même analogie.

La tradition, issue de l'analogie comme égalité de rapports [7], privilégie l'échange des moyens (*permutando*) et l'inversion des rapports (*invertendo*) [17, 13], mais une approche plus moderne donnerait comme transformations de base l'une des quatre opérations de symétrie de la conformité ($c : d :: a : b$), d'inversion des rapports ($b : a :: c : d$), d'échange des moyens ($a : c :: b : d$) ou d'échange des extrêmes ($d : b :: c : a$), comme choix pour l'élément s d'ordre 2 [3] et l'une des deux rotations des termes $b : d :: a : c$ ou $c : a :: d : b$ comme choix pour l'élément r d'ordre 4 afin de construire les huit éléments du groupe diédral D_8 des transformations invariantes du carré, c'est-à-dire $e, er = r, er^2 = r^2, er^3 = r^3, s, sr, sr^2, sr^3$ où e est l'élément neutre [11]. Ces huit éléments sont équivalents aux huit formes possibles d'une même analogie mentionnées plus haut.

$$
\begin{array}{rclcrcl}
a : b :: c : d &=& e & & c : a :: d : b &=& r^3 \\
a : c :: b : d &=& sr^3 & & c : d :: a : b &=& s \\
b : a :: d : c &=& sr^2 & & d : b :: c : a &=& sr \\
b : d :: a : c &=& r & & d : c :: b : a &=& r^2
\end{array}
$$

1. Raison alterne ou raison par échange chez Ozanam [16].
2. L'ajout de la transitivité donnerait une relation d'équivalence.
3. L'ordre d'un élément dans un groupe est le nombre minimal de fois qui permet de retomber sur l'élément neutre. Ainsi, si $a * a \neq e$ et $a * a * a = e$, l'ordre de a est 3.

2 L'analogie numérique revisitée

2.1 Définition

Un précédent article [12] montrait comment définir l'analogie numérique entre nombres réels positifs et non nuls à partir des moyennes généralisées en posant qu'une analogie en p existe si la moyenne généralisée en p de ce que l'on appelle les *moyens*, b et c, est égale à la moyenne généralisée en p de ce que l'on appelle les *extrêmes*, a et d.

Définition : analogie numérique

$$\forall p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\},\ \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,$$

$$a : b ::^p c : d \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} m_p(a,d) = m_p(b,c)$$

La moyenne généralisée de plusieurs nombres $x_1, \ldots x_N$ est la valeur

$$m_p(x_1, \ldots x_N) = \lim_{r \to p} \sqrt[r]{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} {x_i}^r}$$

pour tout $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ [8]. On retrouve :

- la moyenne arithmétique pour $p = 1$;
- la moyenne harmonique pour $p = -1$;
- la moyenne quadratique pour $p = 2$;
- la moyenne géométrique quand p tend vers 0 car $m_0(x_1, \ldots, x_N) = \lim_{p \to 0} m_p(x_1, \ldots x_N) = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$;
- le maximum des nombres quand p tend vers $+\infty$;
- le minimum des nombres quand p tend vers $-\infty$.

Dans le cas de l'analogie numérique, $N = 2$.

2.2 Propriétés

Le précédent article vérifiait que la définition donnée ci-dessus correspond bien aux idées que l'on se fait ordinairement de l'analogie mathématique, à savoir que l'on a bien les trois propriétés caractéristiques données dans l'introduction. Ils démontrait ces résultats à partir de la définition donnée.

De plus, il démontrait plusieurs résultats majeurs parmi lesquels le plus important est que, pour quatre nombres réels positifs non nuls quelconques, à un réordonnancemant près, il existe toujours une analogie numérique entre ces termes et elle est unique. Autrement dit, on peut toujours trouver un p tel que soit $a : b ::^p c : d$, soit $a : c ::^p d : b$, soit $a : d ::^p b : c$.

2.3 L'analogie numérique comme analogie induite par des structures algébriques

Nous montrons ci-dessous, en nous fondant toujours sur la définition de la moyenne généralisée, que l'analogie numérique peut en fait se déduire simplement de résultats algébriques connus.

Dans un premier temps, sans étendre l'ensemble sur lequel est définie l'analogie, en utilisant la moyenne généralisée comme la loi interne, commutative, du magma, on peut égaliser l'analogie numérique pour un p donné avec celle induite par la structure de magma commutatif.

Dans un deuxième temps, on montrera qu'en ajoutant à l'ensemble de départ une demi-droite dans le plan complexe, l'analogie numérique pour un p donné se déduit directement de la structure de groupe commutatif obtenue.

2.3.1 Analogie induite par la structure de magma commutatif

Un ensemble muni d'une loi interne est appelé magma. Tout magma commutatif induit une analogie [18, 10] définie par l'égalité de la composition des extrêmes et de la composition des moyens par la loi interne. Les trois propriétés énoncées dans l'introduction sont facilement vérifiables.

Définition : analogie du magma commutatif

Soit $(M, *)$ un magma commutatif.
$\forall (A,B,C,D) \in M^4$,

$$A : B ::_* C : D \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} A * D = C * B.$$

2.3.2 Analogie sur $(\mathbb{R}_+^*, m_p)$

On peut appliquer directement la définition précédente, pour n'importe quel p de $\mathbb{R}$, à l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ muni de la loi interne m_p, c'est-à-dire la moyenne généralisée en p :

$$\begin{aligned} m_p :\ & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* && \to \mathbb{R}_+^* \\ & (x, y) && \mapsto m_p(x,y) = \lim_{r \to p} \left(\frac{1}{2}(x^r + y^r)\right)^{1/r} \end{aligned}$$

Cette loi est commutative. On a donc une structure de magma commutatif, ce qui induit une analogie qui n'est autre, par définition, que l'analogie numérique en p.

$$\begin{aligned} a : b ::_{m_p} c : d &\Leftrightarrow m_p(a,d) = m_p(c,b) = m_p(b,c) \\ &\Leftrightarrow a : b ::^p c : d \end{aligned}$$

Comme c'est un magma, il n'y a pas lieu de parler d'élément neutre ni d'élément opposé.

On peut observer qu'il est loisible d'enlever le facteur un demi dans la loi interne $(x^p + y^p)^{1/p}$ et dans la limite pour les p finis non nuls, ce qui donne une autre loi interne. Pour le cas $p = 0$, on pose directement xy. Notons que, quel que soit p, les deux lois sont équivalentes et induisent la même analogie. $\forall p \in \mathbb{R}^*$,

$$m_p(a,d) = m_p(b,c) \Leftrightarrow (a^p + d^p)^{1/p} = (b^p + c^p)^{1/p}$$

et

$$m_0(a,d) = m_0(b,c) \Leftrightarrow ad = bc$$

2.3.3 Analogie induite par la structure de groupe commutatif

La structure de groupe commutatif induit aussi une analogie [18, 10]. On exprime directement le rapport comme application de la loi interne à l'élément opposé. Les trois propriétés données dans l'introduction sont facilement vérifiables.

Définition : analogie du groupe commutatif

Soit $(G, *)$ un groupe commutatif où X^{-1} note l'opposé de X. $\forall (A, B, C, D) \in G^4$,

$$A : B ::_* C : D \overset{\text{déf.}}{\Leftrightarrow} A * B^{-1} = C * D^{-1}.$$

Pour l'analogie numérique en p, la question est de trouver, pour un p donné, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ sur lequel on ait une loi interne de groupe commutatif dont la structure induise l'analogie numérique en p.

La moyenne généralisée en p, m_p, ne constitue pas une loi de groupe, car on n'a pas d'élément neutre. En effet, supposons qu'il en existe un, appelé e. On aurait alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(\frac{1}{2}(x^p + e^p)\right)^{1/p} = x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x^p + e^p) = x^p \\ &\Leftrightarrow x^p + e^p = 2x^p \\ &\Leftrightarrow e^p = x^p \\ &\Leftrightarrow e = x \end{aligned}$$

Il n'y aurait pas unicité de l'élément neutre, ce qui est impossible car, dans un groupe, l'élément neutre est unique.

En revanche, nous allons montrer que la loi $+_p$ définie par $x +_p y = (x^p + y^p)^{1/p}$ constitue bien une loi commutative de groupe sur une extension de $\mathbb{R}_+^*$. Cette loi est obtenue en enlevant le facteur un demi de l'écriture de la moyenne généralisée, ainsi que la limite. Comme vu plus haut, on posera $x +_0 y = xy$. Il est alors nécessaire d'étendre $\mathbb{R}_+^*$ premièrement pour y ajouter l'élément neutre, et deuxièmement pour y ajouter les éléments opposés des éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Si on y arrive, on aura alors immédiatement l'analogie numérique en p comme analogie induite par cette structure de groupe commutatif.

On peut au passage remarquer que, contrairement à m_p, la loi $+_p$ n'est pas une moyenne de Kolmogoroff. Les cinq axiomes définissant la notion de moyenne de Kolmogoroff sont : la symétrie, le point fixe, la croissance, la continuité et la substitution. La propriété de point fixe demande que $x +_p x = x$; or $x +_p x = 2^{1/p} x \neq x$ en général.

Définition de l'ensemble Pour $p \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble suivant. La justification sera donnée plus bas.

$$\mathbb{A}_p = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \cup \{0\} & \cup \{xe^{i\pi/p}, x \in \mathbb{R}_+^*\} & \text{si } p > 0 \\ \mathbb{R}_+^* & & & \text{si } p = 0 \\ \mathbb{R}_+^* & \cup \{+\infty\} & \cup \{xe^{i\pi/p}, x \in \mathbb{R}_+^*\} & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

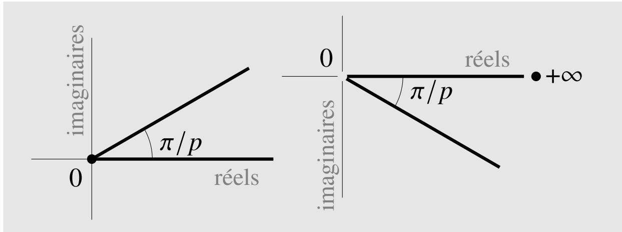

FIGURE 1 – À gauche, ensemble $\mathbb{A}_p$ pour p positif. L'élément neutre 0 est ajouté aux deux demi-droites ouvertes. À droite, ensemble $\mathbb{A}_p$ pour p négatif. L'élément neutre $+\infty$ est ajouté, mais 0 est exclu.

Cet ensemble (voir la figure 1) est, aux variations près,
- la demi-droite ouverte des réels non nuls positifs
- union l'élément neutre de la loi interne
- union la demi-droite ouverte d'angle π/p si p est non-nul.

Définition de la loi interne On munit cet ensemble de la loi de composition interne $+_p$ définie comme dit plus haut.

$$\begin{aligned} +_p : \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_p &\to \mathbb{A}_p \\ (x, y) &\mapsto (x^p + y^p)^{1/p} \end{aligned}$$

Dans le cas où p est positif, $+_p$ correspond à la norme L_p. Il suffit de voir qu'un couple (x, y) de $\mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_p$ est équivalent à un vecteur de deux dimensions $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a alors l'égalité :

$$x +_p y = \|\vec{v}\|_p.$$

On vérifie maintenant que l'ensemble $\mathbb{A}_p$ muni de $+_p$ est bien un groupe commutatif.

Loi de composition interne. Pour un élément x de $\mathbb{A}_p$, de deux choses l'une. Soit x est un réel positif sur la demi-droite des réels positifs, soit il est sur la demi-droite d'angle π/p. Dans le premier cas, la puissance p de x est un réel positif. Dans le deuxième cas, la puissance p de x est un réel négatif. En effet, si x est situé sur la demi-droite d'angle π/p, c'est un nombre complexe de la forme $xe^{i\pi/p}$ et sa puissance p est de la forme $x^p \times e^{i\pi}$. Maintenant, x étant réel positif et $e^{i\pi}$ étant égal à -1, $\left(xe^{i\pi/p}\right)^p = x^p e^{i\pi} = -(x^p)$ est un réel négatif.

La somme de deux nombres réels étant un nombre réel, pour x et y dans $\mathbb{A}_p$, $x^p + y^p$ est donc un nombre réel. S'il est positif, $(x^p + y^p)^{1/p}$ est un nombre réel. S'il est négatif, alors il est de la forme $\rho e^{i\pi}$ avec ρ réel positif, et $(x^p + y^p)^{1/p}$ est donc de la forme $\rho^{1/p} e^{i\pi/p}$, c'est-à-dire qu'il est situé sur la demi-droite d'angle π/p. Dans tous les cas, donc, la somme au sens de la loi de composition $+_p$ de deux éléments de $\mathbb{A}_p$ est dans $\mathbb{A}_p$. On en conclut que $+_p$ est une loi de composition interne dans $\mathbb{A}_p$.

Associativité de $+_p$. Pour p non nul on démontre l'associativité avec le développement suivant.

$$\begin{aligned}(x +_p y) +_p z &= \left(\left((x^p + y^p)^{1/p}\right)^p + z^p\right)^{1/p} \\ &= ((x^p + y^p) + z^p)^{1/p} \\ &= (x^p + (y^p + z^p))^{1/p} \\ &= \left(x^p + \left((y^p + z^p)^{1/p}\right)^p\right)^{1/p} \\ &= x +_p (y +_p z)\end{aligned}$$

Pour p nul, l'associativité est celle de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

Elément neutre pour $+_p$. Pour p non nul positif, l'élément neutre est 0 car on a : $x +_p 0 = (x^p + 0^p)^{1/p} = (x^p)^{1/p} = x$. Et même chose pour $0 +_p x$ par commutativité de $+$.

Pour p non nul négatif, l'élément neutre est $+\infty$. En effet on a : $x +_p +\infty = (x^p + +\infty^p)^{1/p} = (x^p + 0)^{1/p} = x$. Et même chose pour $+\infty +_p x$ par commutativité de $+$.

Pour p nul, l'élément neutre est 1.

Elément opposé. L'élément opposé de tout x dans $\mathbb{R}$ est $xe^{i\pi/p}$. Tout nombre y sur la demi-droite d'angle π/p peut s'écrire comme $xe^{i\pi/p}$ et son élément opposé est alors x. En effet, on a, pour p positif :

$$\begin{aligned}x +_p xe^{i\pi/p} &= \left(x^p + x^p e^{i\pi}\right)^{1/p} \\ &= (x^p + x^p \times -1)^{1/p} \\ &= (x^p - x^p)^{1/p} \\ &= (0)^{1/p} = 0\end{aligned}$$

On a aussi $xe^{i\pi/p} +_p x = 0$ par commutativité de $+$ dans $\mathbb{C}$. Pour p négatif, le raisonnement est le même en remplaçant 0 par $+\infty$. Pour p nul, l'élément neutre est 1 et l'opposé de x est $1/x$. Ci-dessous, on notera $-_p x$ l'opposé de x pour $+_p$.

Commutativité. Celle de $+$ dans $\mathbb{C}$ implique trivialement que $x +_p y = y +_p x$ pour p non nul. Pour p nul, c'est la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$.

En résumé, $\mathbb{A}_p$ muni de $+_p$ est un groupe commutatif.

2.3.4 Analogie sur $(\mathbb{A}_p, +_p)$

La structure de groupe commutatif de $(\mathbb{A}_p, +_p)$ induit donc une analogie définie par : $\forall (a, b, c, d) \in \left(\mathbb{A}_p\right)^4$,

$$a : b ::_{+_p} c : d \quad \Leftrightarrow \quad a +_p (-_p b) = c +_p (-_p d)$$

Restreinte aux éléments de $\mathbb{R}_+$, cette définition devient :

$$a : b ::_{+_p} c : d \quad \Leftrightarrow \quad a +_p (be^{i\pi/p}) = c +_p (de^{i\pi/p})$$

Pour p non nul, on a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}a : b ::_{+_p} c : d &\Leftrightarrow (a^p - b^p)^{1/p} = (c^p - d^p)^{1/p} \\ &\Leftrightarrow (a^p - b^p) = (c^p - d^p) \\ &\Leftrightarrow (a^p + d^p) = (b^p + c^p) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(a^p + d^p)\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2}(b^p + c^p)\right)^{1/p} \\ &\Leftrightarrow a : b ::^p c : d\end{aligned}$$

Pour p nul, on vérifie aussi $a : b ::_{+_0} c : d \Leftrightarrow a : b ::^0 c : d$.

On remarquera que la commutativité de la loi du groupe implique l'équivalence entre une analogie quelconque et celle sur les opposés des termes [18, 10].

$$a : b :: c : d \quad \Leftrightarrow \quad a^{-1} : b^{-1} :: c^{-1} : d^{-1}$$

Adapté à notre cas, et à partir de termes réels, cette équivalence énonce que l'analogie sur la demi-droite des réels positifs a son analogie correspondante sur la demi-droite d'angle π/p.

$$a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad ae^{i\pi/p} : be^{i\pi/p} ::^p ce^{i\pi/p} : de^{i\pi/p}$$

Enfin, tout groupe commutatif est aussi un magma commutatif. Le résultat précédent énonce que l'analogie du groupe commutatif est équivalente à l'analogie numérique ; l'alinéa 2.3.2 montrait que l'analogie du magma était l'analogie numérique ; on a donc l'équivalence de ces trois analogies sur les réels positifs non nuls. $\forall (a, b, c, d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$,

$$a : b ::_{m_p} c : d \quad \Leftrightarrow \quad a : b ::^p c : d \quad \Leftrightarrow \quad a : b ::_{+_p} c : d$$

3 L'analogie numérique étendue au cas où l'un des termes est égal à zéro

Les seuls groupes commutatifs $\mathbb{A}_p$ donnés plus haut qui contiennent 0 sont pour p strictement positif. On a alors : $\mathbb{A}_p = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} \cup \{xe^{i\pi/p}, x \in \mathbb{R}_+^*\}$. Il est donc possible d'y étendre l'analogie en p, strictement positif, à des analogies avec certains des termes égaux à zéros. Ci-dessous nous considérons les cas où les termes sont dans $\mathbb{R}_+$, car, dans les applications pratiques, les nombres manipulés sont généralement réels et pas complexes.

Théorème : analogie avec terme nul ($p > 0$)

Pour tout p strictement positif et tout couple de nombres réels positifs, éventuellement nuls, on a toujours une analogie en p entre, comme moyens, ces nombres et, comme extrêmes, 0 et leur moyenne généralisée en p fois la racine p-ième de 2.
$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \forall (b, c) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$0 : b ::^p c : \left(2^{1/p} \times m_p(b, c)\right)$$

Démonstration : on vérifie simplement l'égalité entre les moyennes généralisées en p des extrêmes et des moyens.

$$\begin{aligned}&0^p + \left(2^{1/p}\left(\frac{1}{2}(b^p + c^p)\right)^{1/p}\right)^p \\ &= \left(\left(2 \times \frac{1}{2}\right)^{1/p} (b^p + c^p)^{1/p}\right)^p \\ &= b^p + c^p \qquad \square\end{aligned}$$

Cela permet d'établir que l'analogie en p entre 0 répété et un nombre réel positif quelconque, éventuellement non nul, répété, est valable quel que soit p positif et non nul.

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall d \in \mathbb{R}_+,\ 0 : 0 ::^p d : d$$

Noter que d peut être égal à 0.

On déduit aussi facilement que l'analogie ayant deux zéros comme extrêmes n'est possible que si les moyens sont égaux eux aussi à zéro.

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 0 : b :: c : 0 \ \Rightarrow\ b = c = 0$$

Démonstration : trivialement, pour p positif non nul et b, c positifs, $b^p + c^p = 0 \ \Rightarrow\ b = c = 0$. □

Remarquons, que si l'on pose $(+\infty)^p = 0$ pour $p < 0$, on peut énoncer un théorème équivalent pour p négatif. Du point de vue algébrique, il s'agit toujours de l'analogie du groupe commutatif $(\mathbb{A}_p, +_p)$, cette fois-ci avec p négatif et donc $+\infty$ comme élément neutre.

Théorème : analogie avec terme infini ($p < 0$)

$\forall p \in \mathbb{R}_-^*, \forall (b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2,$

$$\left(2^{1/p} \times m_p(b,c)\right) : b ::^p c : +\infty$$

4 Précision des bornes de la puissance analogique

Le précédent article [12] mentionnait rapidement comment, étant donné un quadruplet de nombres positifs, on peut déterminer la puissance p de l'analogie en p au moyen d'une recherche dichotomique partant de $-\infty$ et $+\infty$. Nous exhibons ci-dessous des bornes plus fines pour p.

4.1 Relation entre les termes du second rapport $c : d$

Pour une analogie en puissance p, avec p positif, les termes les plus grands, c et d par convention, entretiennent une relation d'ordre impliquant l'inverse de la puissance p. Insistons sur le fait que, ci-dessous, p est positif.

Lemme : termes du second rapport

$\forall p \in \mathbb{R}_+,\ \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ a < b < c < d,$

$$a : b ::^p c : d \ \Rightarrow\ \begin{cases} d \ \le\ 2^{1/p} \times c \\ c \ \le\ 2^{1/p} \times d \end{cases}$$

Démonstration : elle se fait en deux temps. Dans un premier temps, on exploite un encadrement de la moyenne généralisée en p pour p positif. Dans un deuxième temps, on applique la définition de l'analogie en puissance p qui énonce l'égalité des moyennes généralisées en p des extrêmes et des moyens.

Premier temps : on considère un p positif et deux nombres positifs non nuls tels que $0 < a < d$.

$$\begin{aligned} & d^p \le a^p + d^p \le 2d^p \\ \Leftrightarrow\ & d^p \le 2 \times \frac{1}{2}(a^p + d^p) \le 2d^p \\ \Leftrightarrow\ & (d^p)^{1/p} \le 2^{1/p} \times \left(\frac{1}{2}(a^p + d^p)\right)^{1/p} \le 2^{1/p} (d^p)^{1/p} \\ \Leftrightarrow\ & d \le 2^{1/p} \times \left(\frac{1}{2}(a^p + d^p)\right)^{1/p} \le 2^{1/p} d \\ \Leftrightarrow\ & m_{+\infty}(a,d) \le 2^{1/p} m_p(a,d) \le 2^{1/p} m_{+\infty}(a,d) \\ \Leftrightarrow\ & (1/2)^{1/p}\, m_{+\infty}(a,d) \le m_p(a,d) \le m_{+\infty}(a,d) \end{aligned}$$

La première séquence d'inégalités est vraie parce que p est positif, a est positif et d est plus grand que a. L'élévation à la puissance $1/p$ ne change pas l'ordre des inégalités car p est positif. [4]

On applique ce résultat à b et c en posant $0 < b < c$.

$$(1/2)^{1/p}\, m_{+\infty}(b,c) \le m_p(b,c) \le m_{+\infty}(b,c)$$

La prise des opposés inverse le sens des inégalités.

$$-m_{+\infty}(b,c) \le -m_p(b,c) \le -(1/2)^{1/p}\, m_{+\infty}(b,c)$$

On en dérive : $\forall p \in \mathbb{R}_+,\ \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a < b < c < d,$

$$\begin{aligned} & (1/2)^{1/p} m_{+\infty}(a,d) - m_{+\infty}(b,c) \\ & \quad \le m_p(a,d) - m_p(b,c) \\ & \qquad \le m_{+\infty}(a,d) - (1/2)^{1/p}\, m_{+\infty}(b,c) \end{aligned}$$

Deuxième temps : on applique les inégalités précédentes à l'analogie en puissance p, qui énonce l'égalité des moyennes généralisées en p.

$\forall p \in \mathbb{R}_+,\ \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a < b < c < d,$

$$\begin{aligned} & a : b ::^p c : d \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} d - c \le \underbrace{m_p(a,d) - m_p(b,c)} \le d - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} c \\ \Rightarrow\ & \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} d - c \le 0 \le d - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} c \\ \Rightarrow\ & d - 2^{1/p} c \le 0 \le 2^{1/p} d - c \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} d \ \le\ 2^{1/p}\, c \\ c \ \le\ 2^{1/p}\, d \end{cases} \end{aligned}$$

□

4. Il existe un résultat semblable bien connu pour la norme L_p :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+,\ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \ \|\vec{x}\|_{+\infty} \le \|\vec{x}\|_p \le n^{1/p}\, \|\vec{x}\|_{+\infty}.$$

4.2 Relation entre les termes du premier rapport $a : b$

On peut procéder de la même manière que précédemment directement. Mais en passant par les inverses, qui inversent le sens des inégalités, en laissant p positif et en prenant son opposé, on peut écrire :

$$m_{-\infty}(a,d) \leq m_{-p}(a,d) \leq 2^{1/p} m_{-\infty}(a,d)$$

Observez que le résultat final fait intervenir la moyenne généralisée en $-p$, avec p positif. Pour p négatif, on aura donc :

$$m_{-\infty}(a,d) \leq m_p(a,d) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} m_{-\infty}(a,d)$$

Les mêmes manipulations que plus haut pour $m_{+\infty}$ conduisent au résultat suivant, pour p négatif, attention, pas positif, en prenant garde que le facteur $2^{1/p}$ est placé différemment ici.
$\forall p \in \mathbb{R}_-,\ \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ 0 < a \leq b \leq c \leq d,$

$$\begin{aligned}
& a : b ::^p c : d \\
\Rightarrow\ & a - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} b \leq \underbrace{m_p(a,d) - m_p(b,c)} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} a - b \\
\Rightarrow\ & a - \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} b \leq 0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p} a - b \\
\Rightarrow\ & 2^{1/p} a - b \leq 0 \leq a - 2^{1/p} b \\
\Rightarrow\ & \begin{cases} 2^{1/p} \times a \leq b \\ 2^{1/p} \times b \leq a \end{cases}
\end{aligned}$$

On peut donc conclure pour le cas où p est négatif.

Lemme : termes du premier rapport

$$\forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ \forall p \in \mathbb{R}_-,\ a < b < c < d,$$

$$a : b ::^p c : d \Rightarrow \begin{cases} 2^{1/p} \times a \leq b \\ 2^{1/p} \times b \leq a \end{cases}$$

4.3 Bornes pour la puissance analogique

Les lemmes précédents permettent de donner des bornes de la puissance d'une analogie donnée. Pour quatre nombres a, b, c et d, réels positifs, non nuls, différents deux à deux et triés par ordre croissant, on sait qu'il existe une analogie en p, $a : b ::^p c : d$.

Si p est positif, le lemme sur les termes du second rapport permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
d \leq 2^{1/p} c &\Leftrightarrow \frac{d}{c} \leq 2^{1/p} \\
&\Leftrightarrow \log_2 \frac{d}{c} \leq 1/p \\
&\Leftrightarrow p \leq 1/\log_2 d/c
\end{aligned}$$

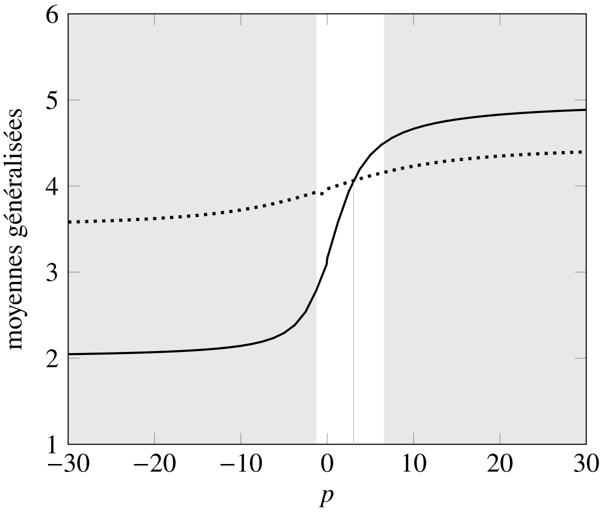

FIGURE 2 – En plein, moyennes généralisées pour $a = 2$ et $d = 5$, avec p en abscisse. En pointillé, même chose pour $b = 3{,}5$ et $c = 4{,}5$. La puissance p de l'analogie $a : b ::^p c : d$ est donnée par l'intersection des courbes pleine et pointillée. En l'occurrence $p \simeq 3{,}06$. La zone en clair, entre les bornes $-1{,}24$ et $6{,}58$, indique l'intervalle à explorer pour trouver cette puissance.

Le lemme sur les termes du premier rapport permet d'écrire, en se rappelant que p est négatif :

$$\begin{aligned}
2^{1/p} \times b \leq a &\Leftrightarrow 2^{1/p} \leq \frac{a}{b} \\
&\Leftrightarrow 1/p \leq \log_2 \frac{a}{b} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a/b} \leq p
\end{aligned}$$

Noter que comme $a < b$, $\log_2 a/b$ est négatif car a/b est inférieur à 1.

En combinant les deux inégalités, on a le théorème ci-dessous. Il peut être étendu pour inclure le cas où l'un des termes est nul. On peut en effet démontrer que quand $a = 0$, a doit être remplacé par d dans la borne inférieure.

Théorème : bornes de la puissance analogique

$$\forall p \in \mathbb{R}, \forall (a,b,c,d) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4, 0 < a < b < c < d,$$

$$\begin{cases} a : b ::^p c : d \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 a/b} \leq p \leq \dfrac{1}{\log_2 d/c} \\[2ex] 0 : b ::^p c : d \Rightarrow \dfrac{1}{\log_2 d/b} \leq p \leq \dfrac{1}{\log_2 d/c} \end{cases}$$

La figure 2 illustre l'encadrement de la puissance analogique entre les bornes calculées par ce théorème, pour une analogie particulière.

```
def puissance_analogique(a, b, c, d):
    # Initialisation des bornes de p.
    ϵ = 0.0001
    if a == 0: n = d else: n = a
    g = ln 2/ln(n/b) − ϵ # borne à gauche
    d = ln 2/ln(d/c) + ϵ # borne à droite
    # Différences des moyennes aux bornes.
    Δ_g = m_g(a,d)-m_g(b,c)
    Δ_d = m_d(a,d)-m_d(b,c)
    # Recherche dichotomique.
    while not (Δ_g ≃ 0.0 or Δ_d ≃ 0.0):
        μ = (g + d)/2 # milieu des bornes
        Δ_μ = m_μ(a,d) − m_μ(b,c)
        if 0 < Δ_μ:
            g, Δ_d = μ, Δ_μ
        else:
            d, Δ_g = μ, Δ_μ
    # Sortie de la puissance.
    if |Δ_g| < |Δ_d|:
        return g
    else:
        return d
```

FIGURE 3 – Algorithme de recherche dichotomique de la puissance d'une analogie. Il s'agit de déterminer le p de valeur $\Delta_p = m_p(a,d) - m_p(b,c)$ la plus plus proche possible de 0 en partant des bornes théoriques g et d. La fonction $\simeq$ décide de l'arrêt. Les termes a, b, c et d doivent être rangés par ordre croissant.

4.4 Calcul de p en pratique : algorithme

Pour déterminer en pratique la puissance p de l'analogie entre quatre nombres a, b, c et d, on pourra donc partir des bornes données dans le théorème précédent et effectuer une recherche par dichotomie comme décrite dans l'algorithme de la figure 3. Les cas particuliers où certains des termes sont égaux, et qui mènent à des puissances infinies ou couvrant tout $\mathbb{R}$, comme détaillé dans l'article précédent [12] n'ont pas besoin de ces bornes pour être traitées. Aussi, avant de lancer cette recherche, on peut isoler le cas des analogies arithmétiques ($p = 1$), géométriques ($p = 0$) ou harmoniques ($p = -1$). C'est ce que nous faisons dans nos implémentations. [5]

Nous avons implémenté l'algorithme de la figure 3 dans deux langages de programmation, Python et C. Pour la version en C, nous avons utilisé deux méthodes, récursive et itérative. Le tableau 1 donne les temps d'exécution de ces différentes implémentations sur la même liste d'un million de quadruplets tirés au hasard. Ces quadruplets contiennent

5. Sous http://lepage-lab.ips.waseda.ac.jp/projects/Kakenhi_Project_21K12038/, ouvrir l'onglet « Experimental Results », voir en bas de page : « num_nlg Python package ».

Langage	Méthode	Temps (s)	Nbr. de pas en moy.
Python	itérative	1782,58	19,1±4,0
C	récursive	2,68	idem
	itérative	2,71	idem

TABLEAU 1 – Temps d'exécution pour le calcul de la puissance analogique pour le même million de quadruplets tirés au hasard. Comparaison entre deux langages de programmation et deux méthodes, récursive et itérative.

des valeurs réelles positives comprises entre 0 et 100 ; en effet, un terme peut être égal à 0 grâce aux développements donnés dans le présent article.

Les temps d'exécution observés disent l'efficacité des versions en C, langage compilé, par rapport à la version en Python, langage interprété, requérant plus de vérifications, et donc plus lent. Elles sont presque 400 fois plus rapides et permettent le calcul d'un million de puissances analogiques en moins de trois secondes. Contre toute attente et sans que nous n'ayons aucune explication à cela, la version récursive en C semble légèrement plus rapide que la version itérative.

5 Agrandissements et rétrécissements

L'extension de l'analogie numérique au cas où l'un des termes est égal à 0 introduisait la moyenne généralisée en p des moyens directement dans l'analogie. Dans ce paragraphe, nous examinons plus en détail les relations existant entre les différentes moyennes que l'on peut prendre entre les termes, et explorons la création d'analogies nouvelles à partir d'une analogie en p donnée.

5.1 Egalité des moyennes de tous les termes, des moyennes des extrêmes et des moyennes des moyens

Il est facile de montrer que, pour une analogie donnée, les trois moyennes suivantes :

— de tous les termes,
— des extrêmes et
— des moyens

sont égales. $\forall (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^*{}_+)^4$,

$$a : b ::^p c : d \;\Rightarrow\; m_p(a,b,c,d) = m_p(a,d) = m_p(b,c)$$

L'égalité $m_p(a,d) = m_p(b,c)$ provient trivialement de la définition de l'analogie. L'égalité avec $m_p(a,b,c,d)$ se déduit de deux propriétés générales des moyennes.

La première propriété est appelée partitionnement pour les moyennes de Kolmogoroff. Elle énonce que l'on peut décomposer une moyenne en moyenne de moyennes de paquets d'éléments de même taille. Autrement dit :

$$\begin{aligned} m(x_1, x_2, \ldots, x_{m\times n}) = m\big(&m(x_1, \ldots, x_n),\\ &m(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}),\\ &\vdots\\ &m(x_{((m-1)\times n)+1}, \ldots, x_{m\times n})\big) \end{aligned}$$

La deuxième propriété est une propriété de point fixe vérifiée par les moyennes de Kolmogoroff. La moyenne de la même valeur répétée est égale à cette valeur. Nous l'appliquons en répétant la moyenne de plusieurs nombres : $m(x_1, \ldots, x_n) = m\,(m(x_1, \ldots, x_n), \ldots, m(x_1, \ldots, x_n))$.

On applique les propriétés précédentes aux quatre termes de l'analogie en décomposant en paquets de deux judicieusement choisis, le paquet des deux moyens et le paquet des deux extrêmes.

$$\begin{aligned} m_p(a, b, c, d) &= m_p(m_p(a, d), m_p(b, c))\\ &= m_p(m_p(a, d), m_p(a, d))\\ &= m_p(a, d) \end{aligned}$$

De même pour $m_p(b, c)$.

5.2 Rétrécissement d'analogie aux moyennes des termes des rapports

5.2.1 Rétrécissement vertical

Étant donnée une analogie en puissance p ($p \neq \pm\infty$), on peut former une nouvelle analogie de même puissance dont les deux conséquents (termes b et d) sont les moyennes des termes du premier et du deuxième rapport. La visualisation donnée plus bas dans la figure 4 explique pourquoi nous appelons ce résultat un rétrécissement vertical.

$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*{}_+)^4$,

$$a : b ::^p c : d \;\Rightarrow\; a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d)$$

Démonstration pour le cas $p \neq 0$:

$$\begin{aligned} m_p(a, m_p(c, d)) &= \left(\frac{1}{2}\left(a^p + \left(\frac{1}{2}(c^p + d^p)\right)^{(1/p)\times p}\right)\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}d^p)\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_p(m_p(a, b), c) &= \left(\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p + c^p)\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p - \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}c^p)\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p - \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}d^p + \frac{1}{2}c^p)\right)^{1/p}\\ &= \left(\frac{1}{2}(a^p + \frac{1}{2}c^p + \frac{1}{2}d^p)\right)^{1/p} \end{aligned}$$

On a pu remplacer $\frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p$ par $\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}d^p$ ci-dessus car on suppose l'analogie $a : b ::^p c : d$. On constate donc que $m_p(a, m_p(c, d)) = m_p(m_p(a, b), c)$, c'est-à-dire $a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d)$. □

Démonstration pour le cas $p = 0$:

$$\begin{aligned} m_0(a, m_0(c, d))^2 &= \sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{b}\sqrt{c}\\ = a \times \sqrt{cd} &= \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{c}\\ = \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{d} &= \sqrt{ab} \times c\\ = \sqrt{a}\sqrt{c}\sqrt{a}\sqrt{d} \nearrow &= m_0(m_0(a, b), c)^2 \end{aligned}$$

car, l'analogie entre a, b, c et d étant supposée, on a l'égalité $\sqrt{ad} = \sqrt{bc}$. □

5.2.2 Généralisation : rétrécissements vertical et horizontal

Les huit formes équivalentes de l'analogie (voir Introduction) permettent de généraliser le résultat précédent. Il suffit de l'appliquer à ces huit formes équivalentes. Par manque de place, nous abrégeons ci-dessous.

$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*{}_+)^4$,

$$a : b ::^p c : d \Rightarrow \begin{cases} a : b ::^p c : d\\ a : c ::^p b : d\\ \vdots\\ d : c ::^p b : a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d)\\ a : m_p(a, c) ::^p b : m_p(b, d)\\ \vdots\\ d : m_p(c, d) ::^p b : m_p(a, b) \end{cases}$$

L'énumération complète permet de constater que l'on a au total seulement quatre formes. Les deux formes $a : m_p(a, b) ::^p c : m_p(c, d)$ et $m_p(a, b) : b ::^p m_p(c, d) : d$ peuvent être considérées comme des rétrécissements verticaux, et les deux formes $a : m_p(a, c) ::^p b : m_p(b, d)$ et $m_p(a, c) : c ::^p m_p(b, d) : d$ comme des rétrécissements horizontaux de l'analogie initiale. Cette dénomination provient de la visualisation trompeuse de la figure 4 ; trompeuse car nous éclatons sur deux dimensions ce qui n'existe que sur une seule. Mais cette vue est conforme à la représentation intuitive de l'analogie comme carré ou rectangle.

5.2.3 Rétrécissement au demi-carré

On peut poursuivre en appliquant le résultat précédent deux fois : une fois verticalement et une autre fois horizontalement. On constate alors que l'on peut rétrécir un carré analogique en un carré homologue selon les moyennes de même puissance. $\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^*{}_+)^4$, $\quad a : b ::^p c : d \;\Rightarrow$

$$a : m_p(a, b) ::^p m_p(a, c) : m_p(a, b, c, d)$$

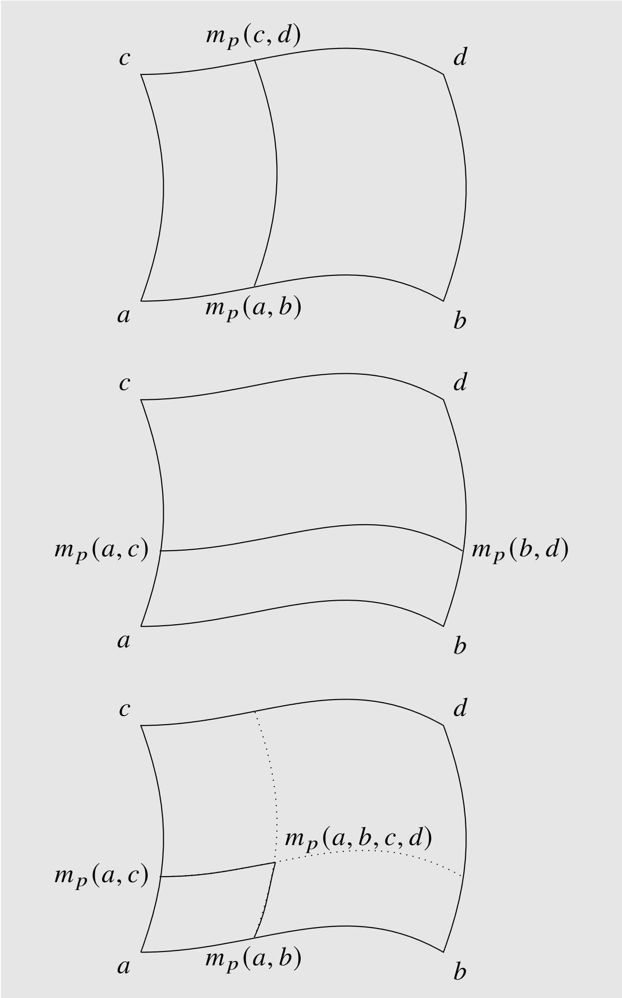

FIGURE 4 – En haut, visualisation du rétrécissement horizontal ; au milieu, du rétrécissement vertical ; en bas, du rétrécissement au demi-carré.

Démonstration pour $p \neq 0$ **:** On développe chacune des moyennes, celle des extrêmes et celle des moyens, élevées à la puissance p sans le facteur $1/2$.

$$2 \times m_p(a, m_p(a, b, , c, d))^p = \left(a^p + \left(\frac{1}{4}(a^p + b^p + c^p + d^p)\right)^{(1/p)\times p}\right) = a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p$$

$$2 \times m_p(m_p(a,b), m_p(a,c))^p = \left(\frac{1}{2}(a^p + c^p)\right)^{(1/p)\times p} + \left(\frac{1}{2}(a^p + b^p)\right)^{(1/p)\times p} = a^p + \frac{1}{2}b^p + \frac{1}{2}c^p$$

Supposer une analogie de puissance p entre a, b, c et d permet d'utiliser l'égalité $a^p + d^p = b^p + c^p$ ci-dessus. Constater l'égalité des deux termes conclut la démonstration pour $p \neq 0$. □

Démonstration pour $p = 0$ **:**

$$\begin{aligned} m_0(a,\ m_0(a,b,c,d)) & & = \sqrt{a\sqrt{bc}} \\ = \sqrt{a\sqrt[4]{abcd}} & & = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}} \\ = \sqrt{a\sqrt[4]{(bc)^2}} \nearrow & & = m_0(m_0(a,b), m_0(a,c)) \end{aligned}$$

car, l'analogie de puissance 0 entre a, b, c et d étant supposée, on a l'égalité $\sqrt{ad} = \sqrt{bc}$, soit $ad = bc$. □

Visualisation : La visualisation du rétrécissement au demi-carré est donnée dans la figure 4.

5.2.4 Itération

On peut envisager à partir d'une analogie donnée, d'itérer le rétrécissement vertical en passant aux moyennes, puis aux moyennes des moyennes, etc. pour produire une série d'analogies de même puissance.

En appliquant la même opération de moyennage itérativement, les termes moyennés convergent vers les termes non moyennés originaux et donc vers une analogie dégénérée du type $a : a :: c : c$ ou $a : b :: a : b$.

Posons :

$$\begin{aligned} M^1(a,b) &= m_p(a,b) \\ M^2(a,b) &= m_p(a, m_p(a,b)) = m_p(a, M^1(a,b)) \\ &\vdots \\ M^{n+1}(a,b) &= m_p(a, M^n(a,b)) \end{aligned}$$

et des définitions similaires pour $M^n(a,b,c,d)$. On a $\lim_{n\to+\infty} M^n(a,b) = a$. En passant à la limite pour l'analogie, on a alors les trois résultats suivants.

$$\lim_{n\to+\infty} a : M^n(a,b) ::^p c : M^n(c,d) \;=\; a : a :: c : c$$

$$\lim_{n\to+\infty} a : b ::^p M^n(a,c) : M^n(b,d) \;=\; a : b :: a : b$$

$$\lim_{n\to+\infty} a : M^n(a,b) ::^p M^n(a,c) : M^n(a,b,c,d) \;=\; a : a :: a : a$$

5.3 Agrandissements

Réciproquement au rétrécissement, on peut établir des propriétés d'agrandissement d'une analogie en puissance p selon les trois directions vues précédemment : verticale, horizontale ou selon les deux à la fois pour le demi-carré. Pour l'agrandissement cela sera un double du carré.

Cela provient du fait que l'on peut résoudre une équation en moyenne : étant donné a et un nombre m donné, il est possible de trouver b tel que $m_p(a,b) = m$ (p est donné aussi). C'est le nombre tel que $b = (m^p - a^p)^{1/p}$ pour $p \neq 0$ et $b = m^2/a$ pour $p = 0$. On voit que a et m doivent vérifier certaines conditions pour que b existe.

6 Conclusion

Revenant sur un précédent article qui définissait l'analogie numérique et montrait qu'à un réordonnancement près il existe une analogie pour tout quadruplet de nombres réels positifs non nuls, nous avons *revisité* cette définition avec des moyens algébriques. Cela nous a permis d'*étendre* à des cas qui n'étaient pas traités précédemment, ceux où l'un des termes est nul.

L'existence d'une analogie équivaut à l'existence d'une puissance analogique. Nous en avons *précisé* les bornes et avons donné un algorithme pour son calcul. Les temps d'exécution obtenus sont raisonnablement courts.

Enfin, l'utilisation explicite de la moyenne généralisée dans les termes d'une analogie nous a permis de produire une infinité d'analogies numériques nouvelles à partir d'une analogie numérique donnée, soit par *rétrécissement*, soit par *agrandissement.*

Cet article a aussi illustré le fait qu'il est possible d'aborder l'étude de l'analogie par différents angles. On peut adopter un point de vue axiomatique [9] comme dans l'introduction de cet article. On peut définir l'analogie en adoptant un point de vue de théorie des modèles [2], comme dans nos développements induisant l'analogie numérique à partir de structures algébriques. On peut encore s'intéresser aux méthodes pratiques pour la détermination des analogies [15, 1, 6] ; notre proposition d'un algorithme de détermination de la puissance analogique va dans ce sens.

La formalisation de l'analogie numérique ouvre la voie à son application dans les modèles d'intelligence artificielle modernes qui travaillent essentiellement sur des représentations vectorielles ou tensorielles.

Références

[1] Alsaidi, S., A. Decker, Puthineath Lay, E. Marquer, P. A. Murena et Miguel Couceiro: *A neural approach for detecting morphological analogies*. Dans *DSAA*, pages 1–10, Porto, 2021. `https://inria.hal.science/hal-03313556`.

[2] Antić, C.: *Analogical proportions*. Annals Math. and AI, 90(6):595–644, 2022. `https://doi.org/10.1007/s10472-022-09798-y`.

[3] Antić, C.: *Boolean proportions*. Log. meth. comp. sci., 20(2):2–20, 2024. `https://doi.org/10.46298/lmcs-20(2:2)2024`.

[4] Aristote: *Poétique*. Gallimard, collection *tel*, Paris, 1996. Trad. J. Hardy.

[5] Aristote: *Éthique à Nicomaque*. Librairie philosophique J. Vrin, Paris, [1er tirage 1990] édition, 1997. Trad. J. Tricot.

[6] Chan, K., S. P. Kaszefski-Yaschuk, C. Saran, E. Marquer et M. Couceiro: *Solving morphological analogies through generation*. Dans Couceiro, M. et P. A. Murena (rédacteurs): *IARML*, 2022. `https://iarml2022-ijcai-ecai.loria.fr/schedule/`.

[7] Euclide: *Les quinze livres des éléments géométriques d'Euclide*. I. Dédin, Paris, 1632.

[8] Hölder, O. L.: *Ueber einen Mittelwerthssatz*. Nach. könig. G. der Wiss. zu Göttingen, 1889(2):38–47, 1889.

[9] Lepage, Y.: *De l'analogie rendant compte de la commutation en linguistique*. mém. d'hab., univ. Grenoble, 2003. `https://theses.hal.science/tel-00004372`.

[10] Lepage, Y.: *Cahiers d'analogie (2)*. `http://lepage-lab.ips.waseda.ac.jp/publications/`, Notes de cours, niveau maîtrise, univ. Waseda, 2018–2025.

[11] Lepage, Y.: *Formulae for the solution of an analogical equation between Booleans using the Sheffer stroke (NAND) or the Pierce arrow (NOR)*. Dans Couceiro, M., P. A. Murena et S. Afantenos (rédacteurs): *IARML*, pages 3–14, 2023. `https://ceur-ws.org/Vol-3492/paper1.pdf`.

[12] Lepage, Y. et M. Couceiro: *Analogie et moyenne généralisée*. Dans Mailly, J. G., F. Schwarzentruber et A. Wilczynski (rédacteurs) : *PFIA-JIAF*, pages 114–124, La Rochelle, 2024. `https://hal.science/AFIA/hal-04620491v1`.

[13] Luino, F. et R. G. Boscovich: *Delle progressioni e serie*. Giuseppe Galeazzi, Milano, 1767.

[14] Miclet, L. et H. Prade: *Handling analogical proportions in classical logic and fuzzy logics settings*. Dans Sossai, C. et G. Chemello (rédacteurs): *Symb. and Quant. Appr. to Reasoning with Uncertainty*, pages 638–650, Berlin, 2009. Springer, ISBN 978-3-642-02906-6.

[15] Murena, P. A., M. Al-Ghossein, J. L. Dessalles et A. Cornuéjols: *Solving analogies on words based on minimal complexity transformation*. Dans Bessière, C. (rédacteur): *IJCAI*, pages 1848–1854, 2020. `https://doi.org/10.24963/ijcai.2020/256`.

[16] Ozanam, J.: *Les elemens d'Euclide, expliquez*. Claude Jombert, Paris, 1711.

[17] Rallier des Ourmes, J. J.: *Proportion*. Dans *Encyclopédie*. Briasson, Paris, 1751–1772.

[18] Stroppa, N.: *Définitions et caractérisation de modèles à base d'analogies pour l'apprentissage automatique des langues naturelles*. Thèse, ENST, 2005. `https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00145147/`.

[19] Шрейдер, Ю. А.: Равенство, сходство, порядок (Égalité, similitude, ordre). Наука, Москва, 1975.