Planification par satisfiabilité avec des actions unaires et post-uniques

Thibault Camu, Stéphane Cardon, Sylvain Lagrue et Guillaume Prévost.

thibault.camu@hds.utc.fr

Plate-Forme Intelligence Artificielle 2025

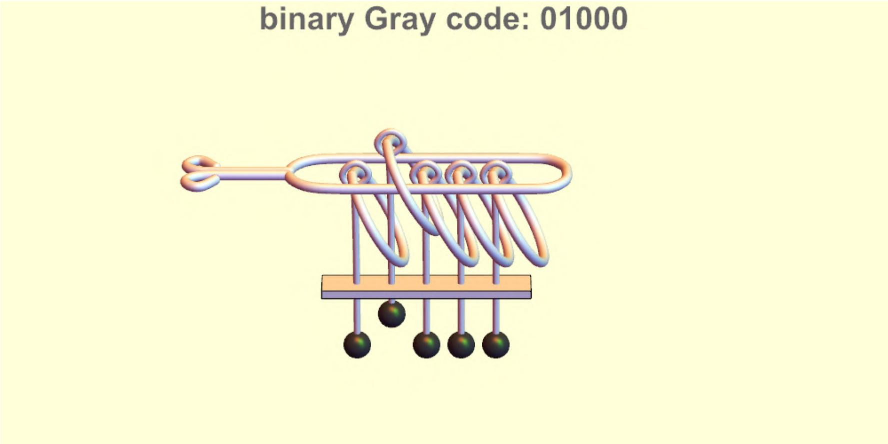
Atelier « Jeux et IA »

Dijon, France.

30/06/25

Planification classique

La planification classique est PSPACE-complète (Bylander, 1994).



Jeu du Baguenaudier à 5 anneaux (Wu, 2011)

Jeu du Baguenaudier à n anneaux (Lucas, 1882) :

- $n = 2k$ pair : au moins $\sum_{i=0}^{k-1} 2^{2i+1} = \frac{2^{n+1}-2}{3}$ actions
- $n = 2k+1$ impair : au moins $\sum_{i=0}^{k} 2^{2i} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$ actions

Simplified Action Structures

Le formalisme SAS (Bäckström, 1992) a 2 particularités :

- Soit $\mathcal{V} = \{v_0, \dots, v_m\}$ l'ensemble des variables d'état, chaque variable $v \in \mathcal{V}$ a son propre domaine fini $\mathcal{D}_v$. On définit également $\mathcal{D}_v^+ = \mathcal{D}_v \cup \{u\}$.
- Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des opérateurs, la définition de chaque opérateur $o \in \mathcal{O}$ comporte 3 conditions ($pre, post, prv \in \mathcal{S}_\mathcal{V}^+ = \mathcal{D}_{v_1}^+ \times \cdots \times \mathcal{D}_{v_m}^+$) telles que :

$$\forall v \in \mathcal{V}\ pre[v] \neq u \implies pre[v] \neq post[v] \neq u$$

$$\forall v \in \mathcal{V}\ post[v] = u \vee prv[v] = u$$

Soient s_0 l'état initial et s_* l'état but, il existe 3 variantes du formalisme :

- SAS : $s_0, s_* \in \mathcal{S}_\mathcal{V} = \mathcal{D}_{v_1} \times \cdots \times \mathcal{D}_{v_m}$
- SAS^*: $s_0 \in \mathcal{S}_\mathcal{V}, s_* \in \mathcal{S}_\mathcal{V}^+$ [1]
- SAS^+: $s_0, s_* \in \mathcal{S}_\mathcal{V}^+$

$$\left.\begin{array}{l} SAS \\ SAS^* \end{array}\right\} \forall o \in \mathcal{O}\ \forall v \in \mathcal{V}\ pre(o)[v] = u \implies post(o)[v] = u$$

[1] *La variante SAS^* est introduite par Peter Jonsson en 1998.*

Simplified Action Structures

Exemple de l'éleveur de chèvres :

- $\mathcal{V} = \{seau, fourche, eau, enclos\}$
- $\mathcal{D}_{seau} = \mathcal{D}_{fourche} = \{posé(e), pris(e)\}$

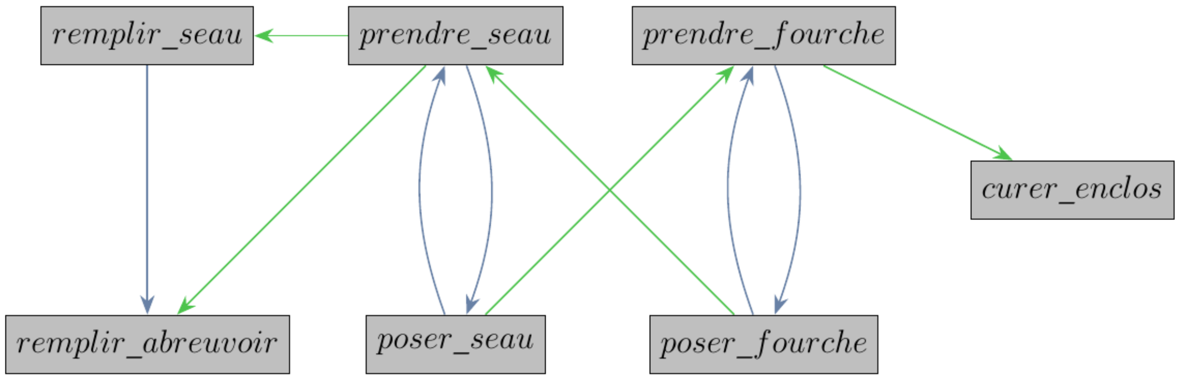
  $\mathcal{D}_{eau} = \{source, seau, abreuvoir\}$

  $\mathcal{D}_{enclos} = \{sale, propre\}$
- $\mathcal{O} = \{prendre\_seau, poser\_seau,$

  $prendre\_fourche, poser\_fourche,$

  $remplir\_seau, remplir\_abreuvoir,$

  $curer\_enclos\}$



Graphe d'opérateurs de l'éleveur de chèvres

L'éleveur de chèvres de Red Dead Redemption II

Restrictions syntaxiques

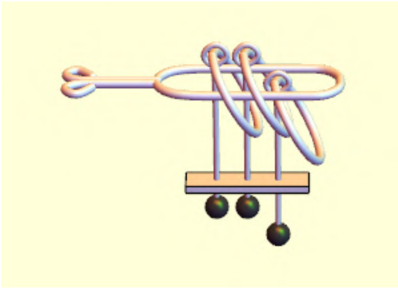
Christer Bäckström (1992) a imaginé 4 restrictions syntaxiques :

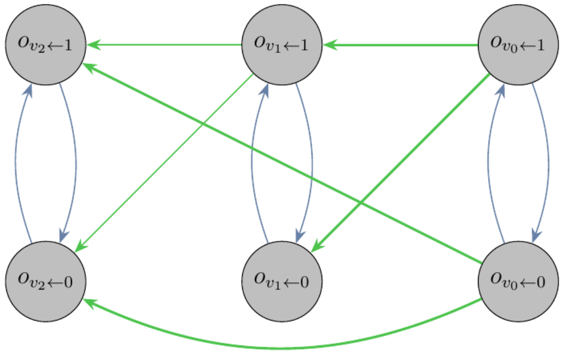
- $P : \forall v \in \mathcal{V}\ \forall o, o' \in \mathcal{O}\ post(o)[v] = post(o')[v] \neq u \implies o = o'$
- $U : \forall v, w \in \mathcal{V}, \forall o \in \mathcal{O}\ post(o)[v] \neq u \wedge post(o)[w] \neq u \implies v = w$
- $B : \forall v \in \mathcal{V}\ |\mathcal{D}_v| = 2$
- $S : \forall v \in \mathcal{V}\ \forall o, o' \in \mathcal{O}\ prv(o)[v] \neq u \wedge prv(o')[v] \neq u \implies prv(o)[v] = prv(o')[v]$

Résultats :

- Génération de plan minimal pour SAS^+PUS en $O(|\mathcal{V}|^2 \max_{v \in \mathcal{V}} |\mathcal{D}_v|)$ (1992)
- Génération de plan quelconque pour SAS^+US en $O(|\mathcal{V}|^4 |\mathcal{O}|)$ (1995)

$$s = (v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 1)$$





Graphe d'opérateurs du Baguenaudier à 3 anneaux

Problématique

Le problème de satisfiabilité booléenne d'une formule de Horn (conjonction de clauses comportant chacune au plus un littéral positif) nommé Horn-SAT est P-complet (Cook, 2010).

$$mammifère \wedge ovipare \wedge venimeux \implies ornithorynque$$

Exemple de clause de Horn stricte

Peut-on facilement encoder un problème de planification exprimé dans l'un des fragments traitables du formalisme SAS en une instance du problème de satisfiabilité booléenne Horn-SAT ?

Codage Horn-SAT

On propose un Horn-renommage $\mathcal{R}$ pour le fragment SAS^*UBS :

- On note N le makespan.
- $\forall t \in [\![0, N]\!]\ \forall v \in \mathcal{V}\ S_v^t$ représente la valeur de la variable v à l'instant t.
- $\mathcal{R} = \{S_v^t \mid t \in [\![0, N]\!], v \in \mathcal{V}, \exists o \in \mathcal{O}\ prv(o)[v] = T\}$
- La formule de Horn est la conjonction des clauses de l'ensemble suivant :

$$\{S_v^0 \mid v \in \mathcal{V}, (s_0[v] = T \wedge S_v^0 \notin \mathcal{R}) \vee (s_0[v] = F \wedge S_v^0 \in \mathcal{R})\} \quad \cup\{S_v^N \mid v \in \mathcal{V}, (s_*[v] = T \wedge S_v^N \notin \mathcal{R}) \vee (s_*[v] = F \wedge S_v^N \in \mathcal{R})\}$$

$$\cup\{\neg S_v^0 \mid v \in \mathcal{V}, (s_0[v] = F \wedge S_v^0 \notin \mathcal{R}) \vee (s_0[v] = T \wedge S_v^0 \in \mathcal{R})\} \quad \cup\{\neg S_v^N \mid v \in \mathcal{V}, (s_*[v] = F \wedge S_v^N \notin \mathcal{R}) \vee (s_*[v] = T \wedge S_v^N \in \mathcal{R})\}$$

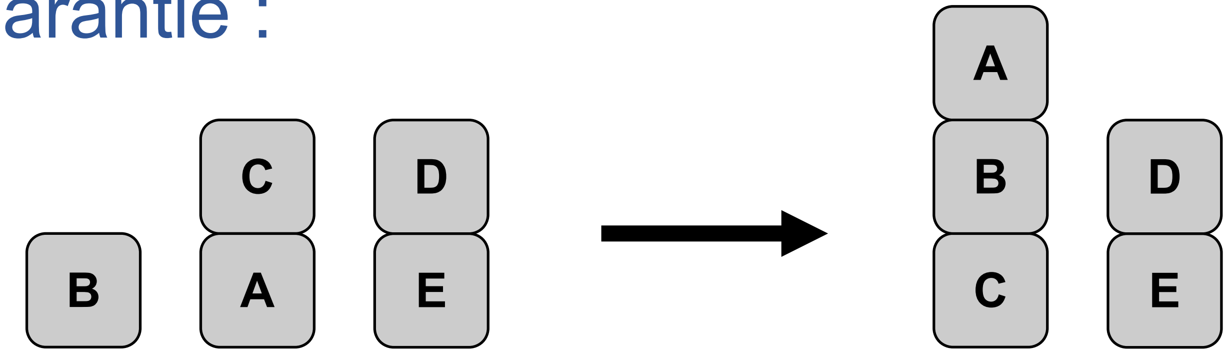
$$\cup\{S_v^{t+1} \implies S_v^t \bigvee_{\substack{o \in \mathcal{O},\\ (post(o)[v]=T \wedge S_v^{t+1} \notin \mathcal{R})\\ \vee (post(o)[v]=F \wedge S_v^{t+1} \in \mathcal{R})}} (\neg S_v^t \bigwedge_{\substack{w \in \mathcal{V},\\ prv(o)[w] \neq u}} (\neg S_w^t \wedge \neg S_w^{t+1})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}\}$$

$$\cup\{\neg S_v^{t+1} \implies \neg S_v^t \bigvee_{\substack{o \in \mathcal{O},\\ (post(o)[v]=F \wedge S_v^{t+1} \notin \mathcal{R})\\ \vee (post(o)[v]=T \wedge S_v^{t+1} \in \mathcal{R})}} (S_v^t \bigwedge_{\substack{w \in \mathcal{V},\\ prv(o)[w] \neq u}} (\neg S_w^t \wedge \neg S_w^{t+1})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}\}$$

Qualité du plan

La minimalité du plan n'est pas garantie :

$$\Pi = \langle \{unstack(C,A), unstack(D,E)\}, \\ \{stack(B,C)\}, \\ \{stack(A,B), stack(D,E)\}\rangle$$



$$\pi = \langle unstack(C,A), unstack(D,E), stack(B,C), stack(A,B), stack(D,E)\rangle$$

Ensemble de clauses requises :

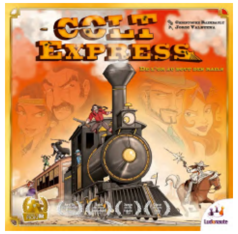
$$\{\neg(S_v^{t+1} \wedge \neg S_v^t) \vee \neg(\neg S_w^{t+1} \wedge S_w^t) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v, w \in \mathcal{V}\}$$
$$\cup\{\neg(S_v^{t+1} \wedge \neg S_v^t) \vee \neg(S_w^{t+1} \wedge \neg S_w^t) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v, w \in \mathcal{V}, v \neq w\}$$
$$\cup\{\neg(\neg S_v^{t+1} \wedge S_v^t) \vee \neg(\neg S_w^{t+1} \wedge S_w^t) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v, w \in \mathcal{V}, v \neq w\}$$

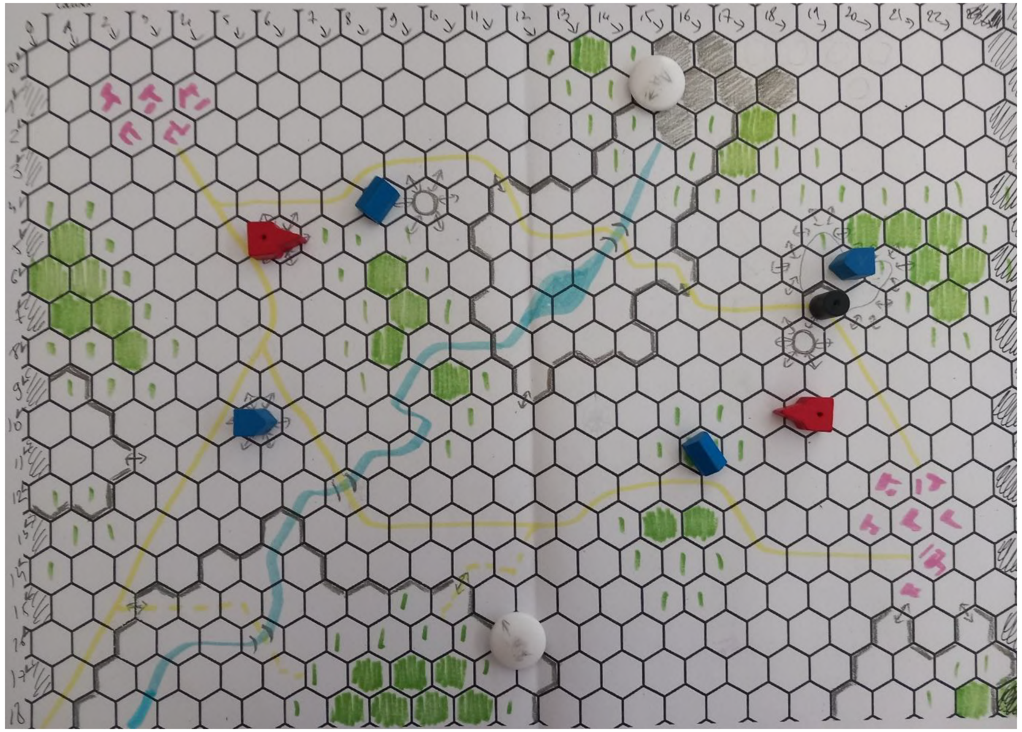
Problème concret

Invention d’un jeu de société, en cours de numérisation :

- Jeu de tactique…

- …à tours simultanés





Plateau de jeu

Exemple de plan

	Tour 1		
	Action 1	Action 2	Action 3
Reconnaissance	17,8 ↖	15,6 ↗	15,6 ↗
Léger 1	6,15 ←	6,15 ←	6,15 ←
Léger 2	13,14 ←	13,14 ←	
Lourd	9,18 ←	8,18 ←	8,18 ←

Déplacements

Les mécanismes de combat mettent l’accent sur le positionnement des unités. Or, il existe deux manières de modéliser un déplacement :

- $\mathcal{V} = \{Compiègne, Dijon\}$

  $\mathcal{D}_{Compiègne} = \mathcal{D}_{Dijon} = \{T, F\}$

  $pre(aller\_de\_Compiègne\_à\_Dijon) = (Compiègne = T, Dijon = F)$

  $post(aller\_de\_Compiègne\_à\_Dijon) = (Compiègne = F, Dijon = T)$

- $\mathcal{V} = \{position\}$

  $\mathcal{D}_{position} = \{Compiègne, Dijon\}$

  $pre(aller\_de\_Compiègne\_à\_Dijon) = (position = Compiègne)$

  $post(aller\_de\_Compiègne\_à\_Dijon) = (position = Dijon)$

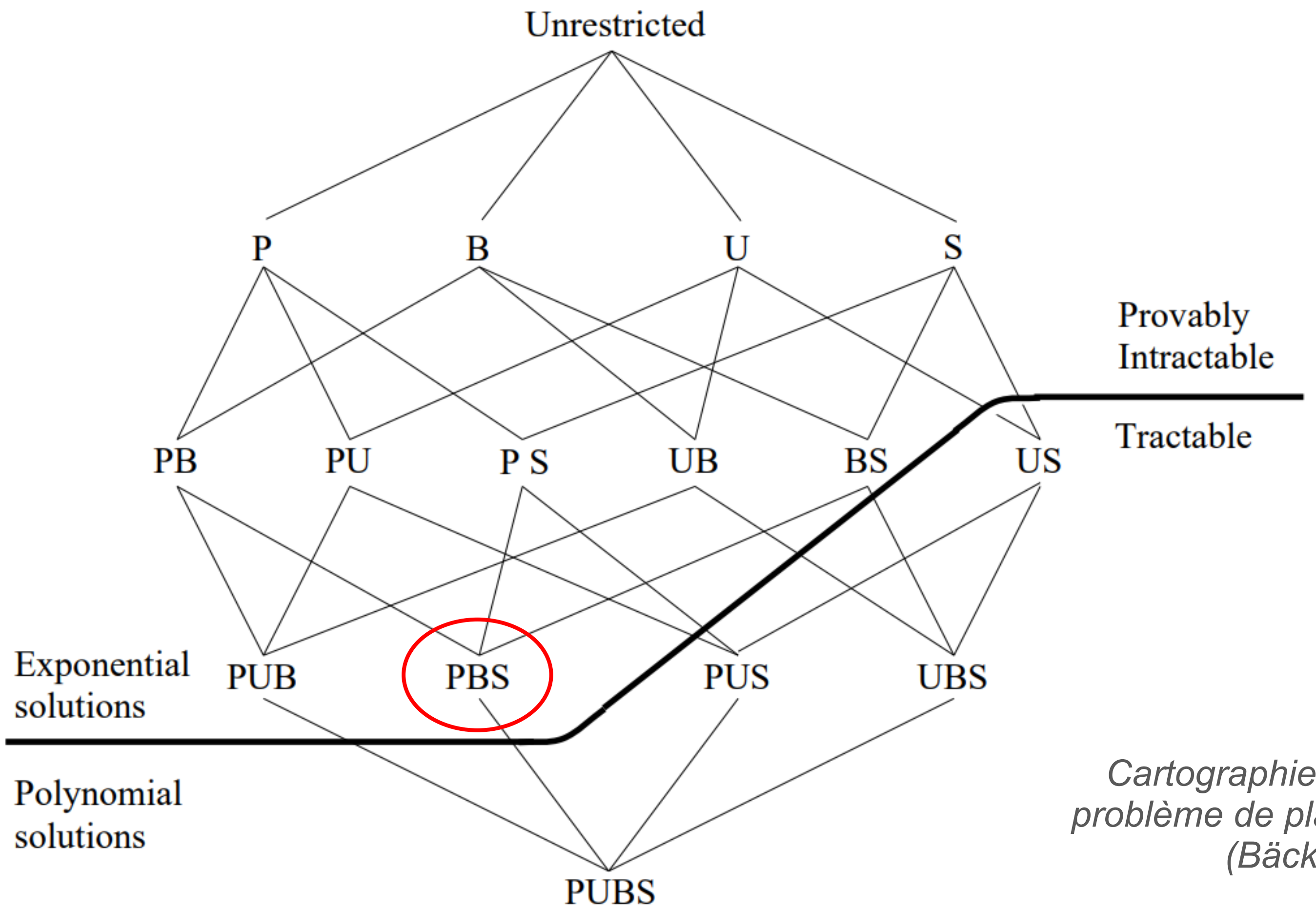
COMPIÈGNE

$\mathcal{O} = \{aller\_de\_Compiègne\_à\_Dijon\}$

DIJON

Déplacements

Est-il possible d'encoder un problème $SAS^* PBS$ en une instance de Horn-SAT ?



Cartographie de la complexité du problème de planification avec SAS^+ (Bäckström, 1995)

Déplacements

Peut-on facilement encoder un problème SAS^*PUS en une instance de Horn-SAT ?

- $\forall t \in [\![0, N]\!]\ \forall v \in \mathcal{V}\ \forall x \in \mathcal{D}_v\ S^t_{v=x}$ indique si v vaut x à l'instant t.
- $\mathcal{R} = \{S^t_{v=x} \mid t \in [\![0, N]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, \exists o \in \mathcal{O}\ prv(o)[v] = x\}$
- La formule à satisfaire est la conjonction des clauses de l'ensemble suivant :

$$\{S^0_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, s_0[v] = x \wedge S^0_{v=x} \notin \mathcal{R}\}$$
$$\cup\{\neg S^0_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, s_0[v] = x \wedge S^0_{v=x} \in \mathcal{R}\}$$
$$\cup\{S^N_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, s_*[v] = x \wedge S^N_{v=x} \notin \mathcal{R}\}$$
$$\cup\{\neg S^N_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, s_*[v] = x \wedge S^N_{v=x} \in \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{S^{t+1}_{v=x} \implies \color{red}{S^t_{v=x}} \bigvee_{\substack{o \in \mathcal{O},\\ post(o)[v]=x\\ avec\ y=pre(o)[v]}} \color{red}{(S^t_{v=y} \in \mathcal{R} \oplus S^t_{v=y}} \bigwedge_{\substack{w \in \mathcal{V},\\ prv(o)[w]=z\neq u}} (\neg S^t_{w=z} \wedge \neg S^{t+1}_{w=z})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, S^{t+1}_{v=x} \notin \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{\color{red}{\neg S^{t+1}_{v=x}} \implies \neg S^t_{v=x} \bigvee_{\substack{o \in \mathcal{O},\\ post(o)[v]=x\\ avec\ y=pre(o)[v]}} \color{red}{(S^t_{v=y}} \bigwedge_{\substack{w \in \mathcal{V},\\ prv(o)[w]=z\neq u}} (\neg S^t_{w=z} \wedge \neg S^{t+1}_{w=z})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \mathcal{D}_v, S^{t+1}_{v=x} \in \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{(S^t_{v=x} \notin \mathcal{R} \oplus S^t_{v=x}) \vee (S^t_{v=y} \notin \mathcal{R} \oplus S^t_{v=y}) \mid t \in [\![0, N]\!], v \in \mathcal{V}, x, y \in \mathcal{D}_v, x \neq y\}$$

Brouillard de guerre

Peut-on facilement encoder un problème SAS^+PUBS en une instance de Horn-SAT ?

- $\forall t \in [\![0, N]\!]\ \forall v \in \mathcal{V}\ \forall x \in \{T, F\}\ S^t_{v=x}$ indique si v vaut x à l'instant t.
- $\mathcal{R} = \{S^t_{v=x} \mid t \in [\![0, N]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \{T, F\}, \exists o \in \mathcal{O}\ prv(o)[v] = x\}$
- La formule à satisfaire est la conjonction des clauses de l'ensemble suivant :

$$\{S^0_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, (s_0[v] = x \land S^0_{v=x} \notin \mathcal{R}) \lor (s_0[v] = u \land S^0_{v=x} \in \mathcal{R})\}$$
$$\cup\{\neg S^0_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, (s_0[v] = x \land S^0_{v=x} \in \mathcal{R}) \lor (s_0[v] = u \land S^0_{v=x} \notin \mathcal{R})\}$$
$$\cup\{S^N_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, s_*[v] = x \land S^N_{v=x} \notin \mathcal{R}\}$$
$$\cup\{\neg S^N_{v=x} \mid v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, s_*[v] = x \land S^N_{v=x} \in \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{S^{t+1}_{v=x} \implies {\color{red}S^t_{v=x}} \bigvee_{\substack{o\in\mathcal{O},\\ post(o)[v]=x}} ((pre(o)[v] \neq u \implies ({\color{purple}S^t_{v=\neg x} \in \mathcal{R} \oplus S^t_{v=\neg x}})) \bigwedge_{\substack{w\in\mathcal{V},\\ prv(o)[w]=z\neq u}} (\neg S^t_{w=z} \land \neg S^{t+1}_{w=z})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, S^{t+1}_{v=x} \notin \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{{\color{red}\neg S^{t+1}_{v=x}} \implies \neg S^t_{v=x} \bigvee_{\substack{o\in\mathcal{O},\\ post(o)[v]=x}} ((pre(o)[v] \neq u \implies {\color{red}S^t_{v=\neg x}}) \bigwedge_{\substack{w\in\mathcal{V},\\ prv(o)[w]=z\neq u}} (\neg S^t_{w=z} \land \neg S^{t+1}_{w=z})) \mid t \in [\![0, N-1]\!], v \in \mathcal{V}, x \in \{T,F\}, S^{t+1}_{v=x} \in \mathcal{R}\}$$

$$\cup\{(S^t_{v=T} \notin \mathcal{R} \oplus S^t_{v=T}) \lor (S^t_{v=F} \notin \mathcal{R} \oplus S^t_{v=F}) \mid t \in [\![0, N]\!], v \in \mathcal{V}\}$$

Références

- **Bäckström**, Christer. *Computational Complexity of Reasoning about Plans*. Thèse de doctorat. Université de Linköping, **1992**.
- **Bäckström**, Christer, et Nebel, Bernhard. Complexity Results for SAS+ Planning. *Computational Intelligence*. Novembre **1995**, vol. 11, n°4, p. 625-655.
- **Bylander**, Tom. The Computational Complexity of Propositional STRIPS Planning. *Artificial Intelligence*. Septembre **1994**, vol. 69, n°1, p. 165-204.
- **Cook**, Stephen, et Nguyen, Phuong. *Logical Foundations of Proof Complexity*. Cambridge University Press, **2010**.
- **Jonsson**, Peter, et Bäckström, Christer. State-Variable Planning under Structural Restrictions: Algorithms and Complexity. *Artificial Intelligence*. Avril **1998**, vol. 100, n°1, p. 125-176.
- **Lucas**, Édouard. *Récréations mathématiques*. 1re éd. Gauthier-Villars, **1882**.
- **Wu**, Frederick. « *The Chinese Rings Puzzle* » *Wolfram Demonstrations Project*. **2011**. Disponible sur https://demonstrations.wolfram.com/TheChineseRingsPuzzle.